

Computer Science A

Hardware Design Excise Text 4

Discrete Fourier Transform

May 9th, 2019

CSAHW Computer Science A, Meiji University

CSA_B3_Text_4 58 Slides
Renji Mikami

講義編4:離散フーリエ変換

離散量のフーリエ変換へ: 講義編3では、数学的な視点からフーリエ級数展開、そしてフーリエ変換の導出へと話を進めました。ここからは離散フーリエ変換に進むわけですが、一般的には、フーリエ変換から離散フーリエ変換を数学的に導出しますが、数学でギブアップになると、先に進めなくなります。

また式の形から見ても、どちらも周期関数ですから、離散フーリエ変換は、フーリエ級数展開に近いものです。各離散値が、各級数項に対応すると考えればわかりやすくなります。

そこで、連続量を対象にしてきた講義編3と平行する形で、サンプリングされた離散量と複素正弦関数の離散値の相関をとります。連続量の場合の関数の掛け算と積分(積分変換)は、離散値同士の行列積になります。

数学的にギブアップ状態の人もここから再スタートしましょう。

フーリエ級数とフーリエ変換の復習

フーリエ級数が求まる条件は、関数が周期的であり、区分的になだらかであるということ、得られるフーリエ級数は、線スペクトルである。

フーリエ変換は、周期を $\pm\infty$ に拡張し非周期関数を扱えるように拡張、これにより連続スペクトル化される。

フーリエ変換とは、もとの関数の中に含まれる正弦、余弦成分を計算することである。正弦、余弦成分をひとつにまとめたものが、複素正弦関数であり、計算を容易にできる。

フーリエ変換には、変換対となる逆フーリエ変換がある。

フーリエ変換は、広くは積分変換に含まれる。正規直交系関数列となる多くの関数でこのような仕組みが成り立つことが知られている。

離散的フーリエ変換

離散的フーリエ変換

離散的フーリエ変換

(DFT: Discrete Fourier Transform)

DFTでは、関数1周期あたり N 個(N は自然数)のサンプル値で離散化しています。以降、離散的フーリエ変換を離散フーリエ変換と呼びます。デジタル信号処理は、DFTを高速に計算する高速フーリエ変換のアルゴリズムの発見により、劇的な発展を遂げました。DFTは、所与の周期関数と複素正弦関数の相関を離散量で求めると考えると理解が容易です。一方DFTにおけるサンプリングは、複素フーリエ級数展開と双対の関係にありますので、DFT式の形も導出も複素フーリエ級数からのほうが(フーリエ変換式からよりも)容易です。少し先の未来の量子コンピュータ時代では基数制約なしのDFTのままでもそのまま解けるだろうと期待しています。

数学編の核関数は、DFTでは何に対応しているのでしょうか？

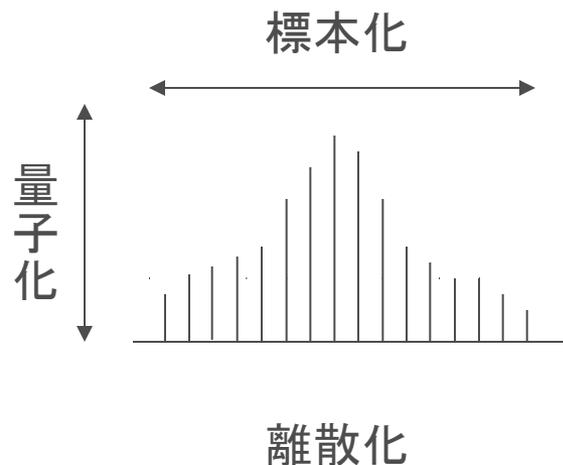
標本化と量子化の問題

連続量の離散化により、一部の情報が失われますが、**標本化定理により、標本化周波数の1/2の周波数以下の信号**は信頼できます。CDやデジタル・オーディオのサンプリング周波数は、44.1KHzになっていますが、これは人間の可聴周波数の上限の20KHzの2倍以上を根拠として再生周波数の上限を20KHzにしています。

一方、振幅方向を考えると、計算のための量子化が行なわれます。

量子化の分解能を16ビット(CDの場合)とすると、LSBとMSBの重みの比は、 $1:2^{16} = 1:65,536$ になります。これは、MSB側のアナログ的な精度が、0.0015%狂うとLSB側の1ビットの値を変えてしまうということになります。

また、16ビットで、0から5Vの電圧を表現するとしたら、最小の分解能は、 $76.293\mu\text{V}$ になりますから、これ以下の電圧を扱うことができませんし、実際の電子回路のノイズは、この数十倍にも及んでしまいます。



アナログ信号をデジタル化することをA/D変換と
いいます。その逆をD/A変換といいます。

前者の処理をする装置を、Analog Digital
Converter (ADC), 後者をDACといいます。

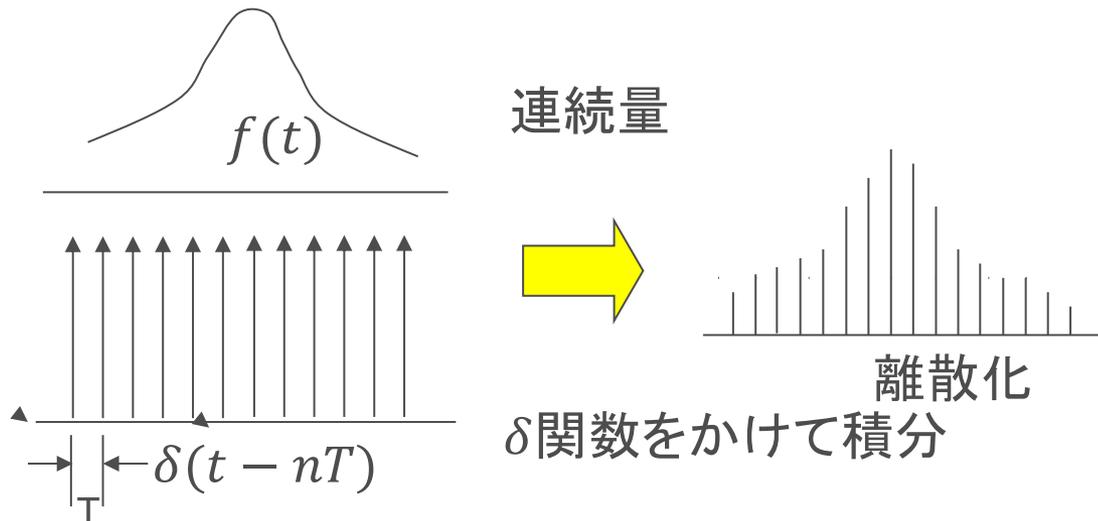
基本的には、パラメータは、サンプリング周波数と
変換のビット幅になり、それぞれ、標本化と
量子化に対応しています。

離散化された値は、離散フーリエ変換として処
理することになります。これがフィルターと
もに、デジタル信号処理の要となります。

連続量の離散化

フーリエ変換では、数学的な導出で連続量が前提でしたが、実際の物理現象を数値的に解析し、これを計算処理する場合には、その値は離散量になります。そのため離散量を扱えるように数学的な拡張を行います。

連続変化の関数から、離散値を得るためには、ディラックのデルタ関数を与関数にかけて積分します。ここで δ 関数は、時間軸の幅がゼロで振幅が ∞ で積分値が1の超関数です。このような信号をインパルスとよびます。(デジタルフィルタの項目で後述します。)



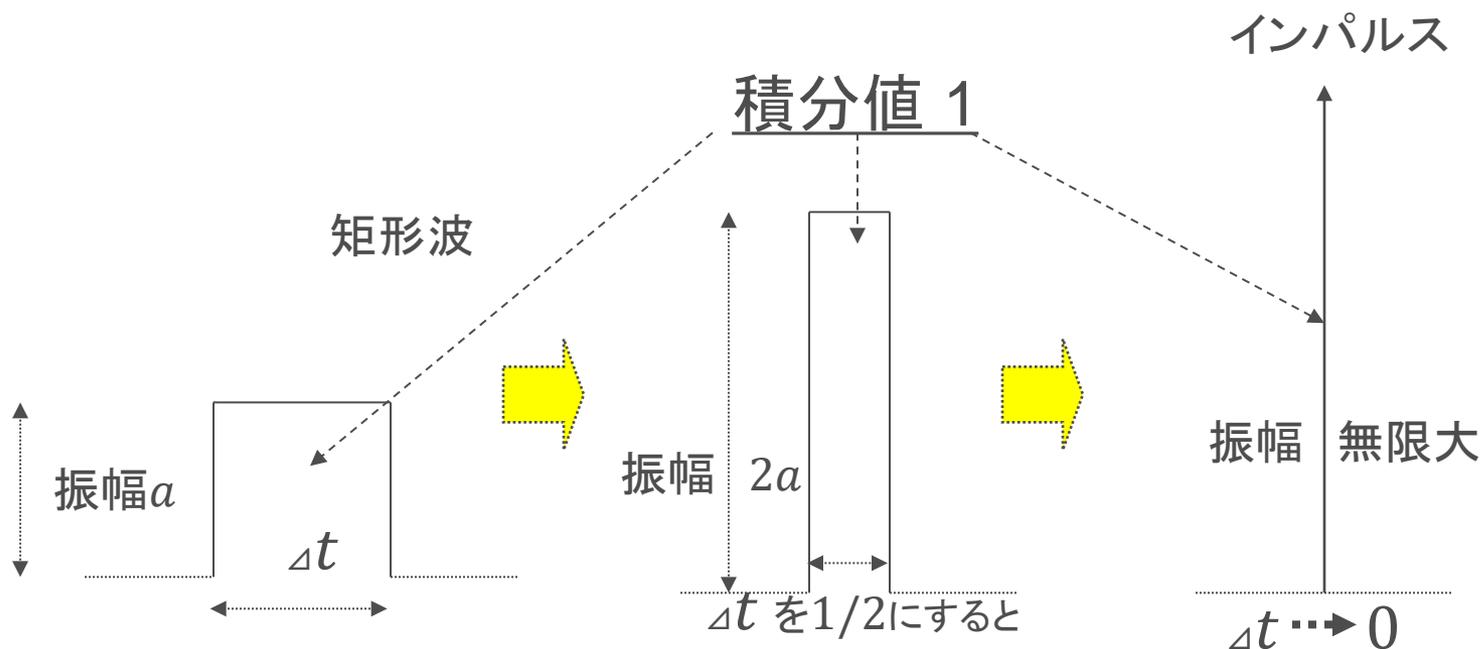
時間 振幅	連続	離散
連続	アナログ	多値
離散	サンプル値	デジタル

ディラックのデルタ関数(追補1)

実際の連続変化信号や情報をデジタル化する場合には、ハードウェアのサンプリング回路とAD変換回路で離散量に変換します。サンプリングは数学的には、連続関数とデルタ関数の掛け算に相当します。

デルタ関数は、区間がゼロで振幅無限大で積分値ゼロの超関数として定義される理想インパルスです。

$a \rightarrow 0 : \delta(x) = \lim \left(\frac{1}{a} \right) * \text{rect}(x/a)$ 矩形波の関数の極限になります。

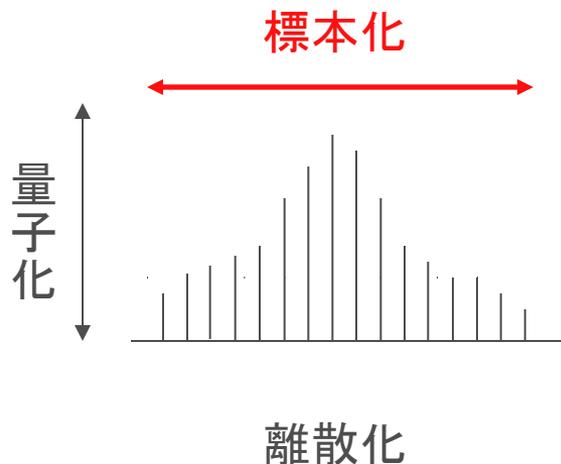


標本化(追補2)

連続量から一定時間間隔で標本化を行なうことは、元の情報の一部が失われていることを意味します。

では、どのような情報が失われているのでしょうか。

標本化(サンプリング)定理によって、標本化(サンプリング)周波数の $\frac{1}{2}$ までの周波数情報までは、正しく得られていることが証明されています。このときの使用できる上限の周波数をナイキスト周波数とよび、ナイキスト周波数以上では、エイリアシング(折り返し)が発生し、正しい情報を再現できなくなります。

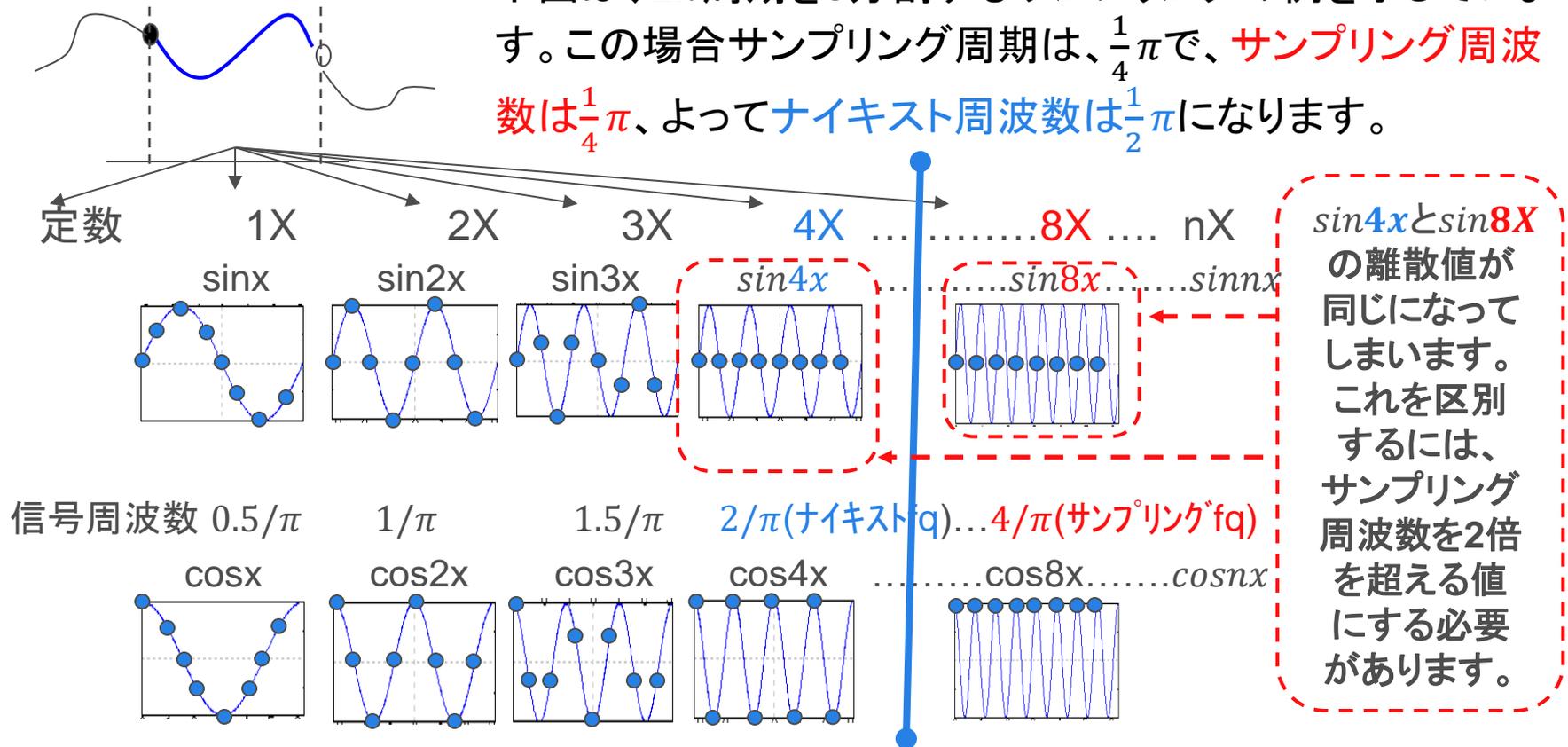


ナイキスト周波数、エイリアシングは、各自で調べてください。

エイリアシングの発生する理由を考えてみてください。

サンプリング周期と信号周波数(追補3)

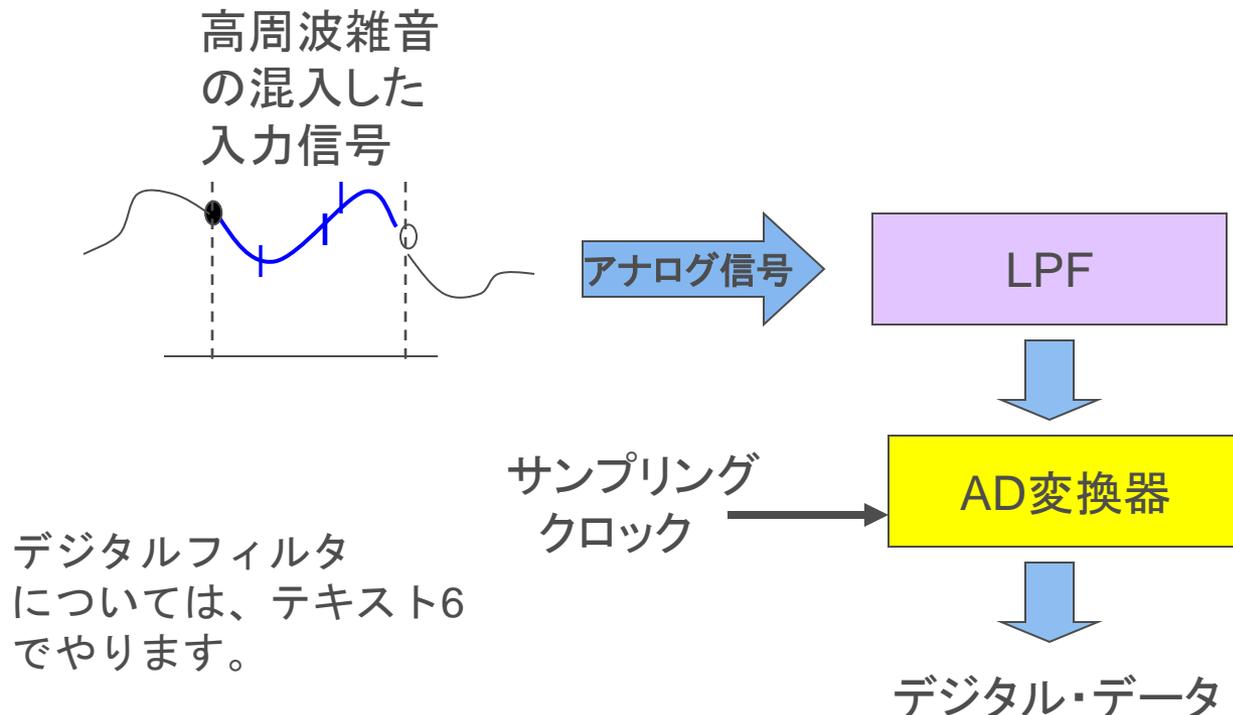
下図は、 2π 周期を8分割するサンプリングの例を示しています。この場合サンプリング周期は、 $\frac{1}{4}\pi$ で、**サンプリング周波数は $\frac{1}{4}\pi$** 、よって**ナイキスト周波数は $\frac{1}{2}\pi$** になります。



サンプリング定理によると正しく再現できる信号は、ナイキスト周波数未満とされています。ナイキスト周波数未満とそれを超える信号がどのように離散量として表されるかを考えてみましょう。また、信号周波数とナイキスト周波数が同じならどうなるでしょうか。

高周波雑音の除去(追補4)

サンプリングは、AD変換器によって行われます。このとき入力信号に高周波雑音が混入していると正しい値が得られなくなります。そこで、必要な帯域以上の周波数を除去する(必要な低い周波数だけを通す)ローパス・フィルタを使用します。

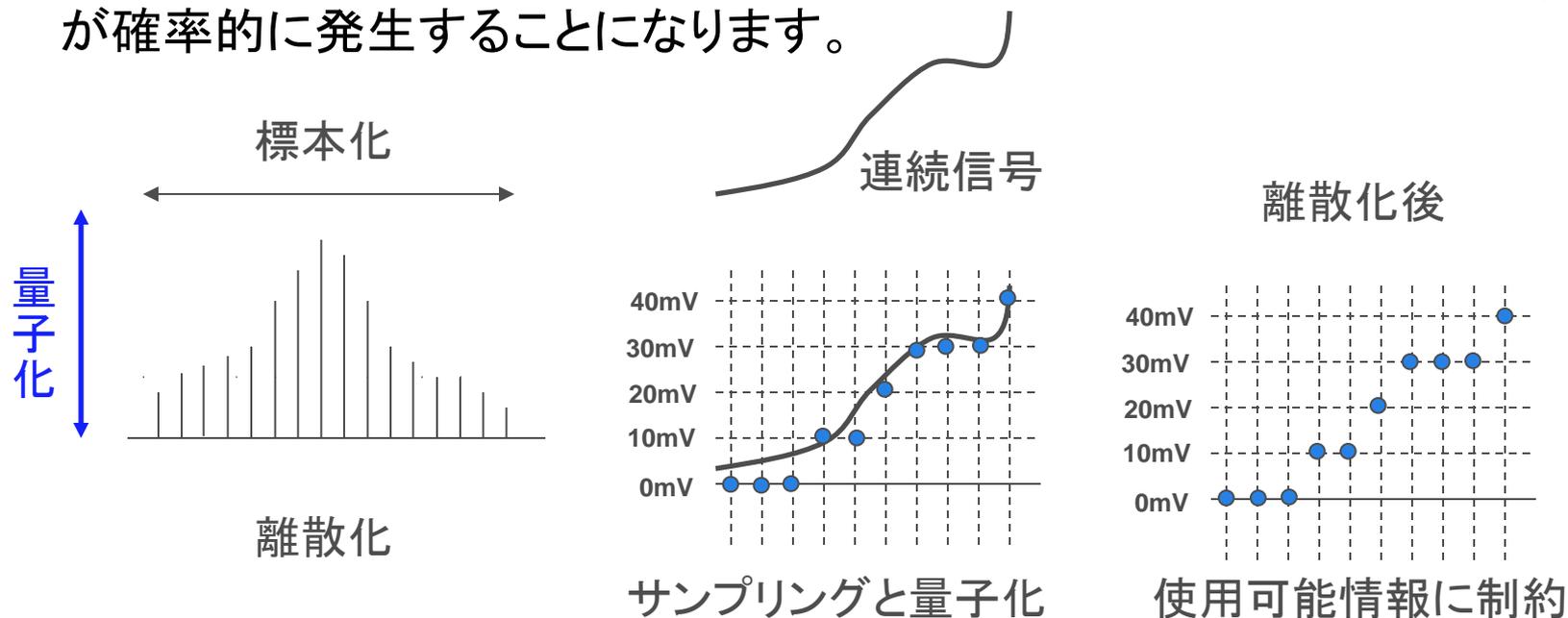


量子化(追補5)

離散化では振幅情報も量子化してデジタル値にします。0から1.023Vまで連続的な値をとるアナログ信号を10ビットで量子化すると、LSB1ビットが最小分解能となり、その値は $1/1024 = \text{約}10\text{mV}$ となります。

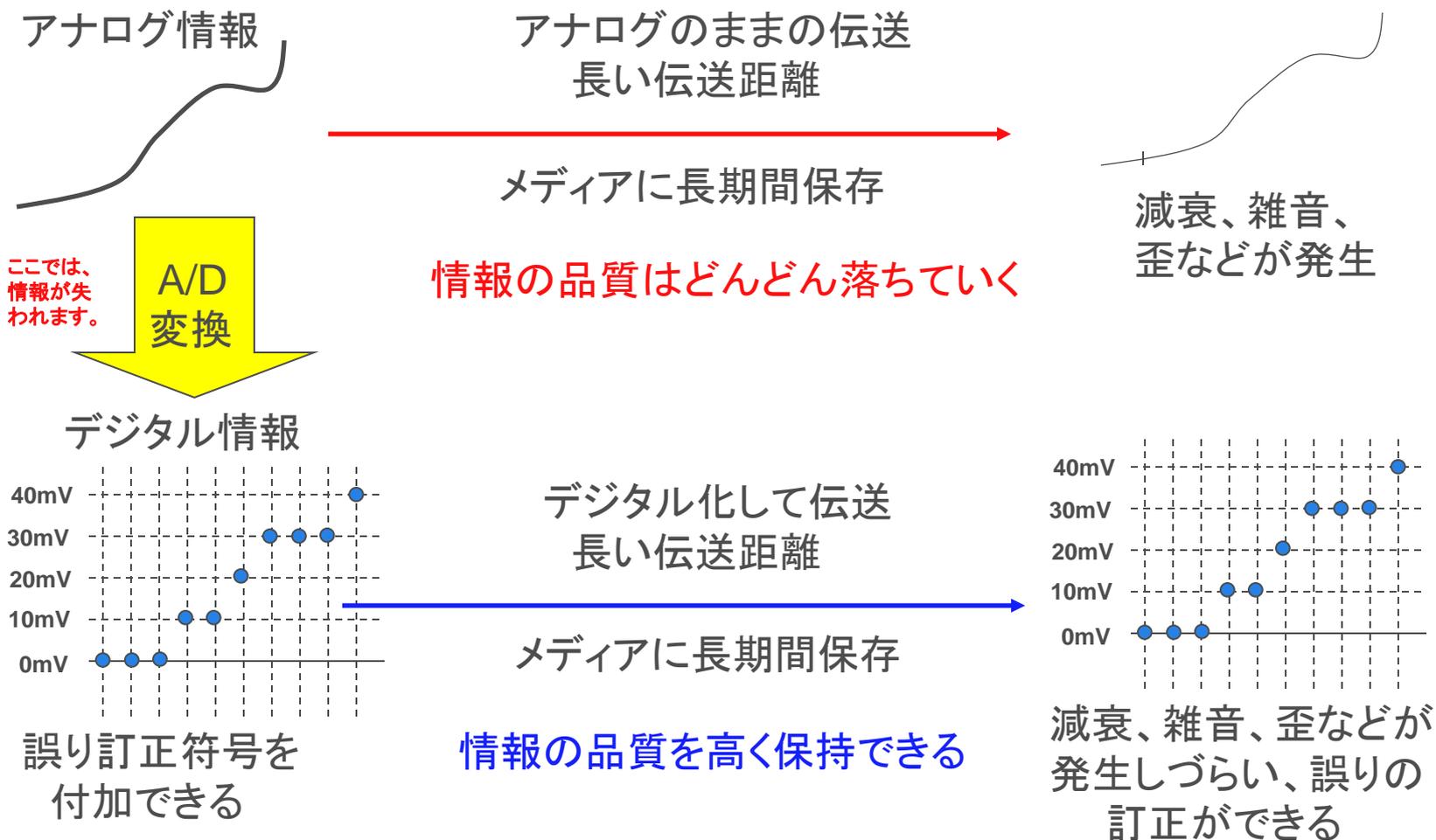
この値以下の信号は、正しく再現されないこととなります。

このような情報を量子化誤差といいます。LSBでは、A/D閾値で四捨五入して1か0にしたとすると、もとのアナログ信号に対して最大50%の誤差(歪)が確率的に発生することとなります。



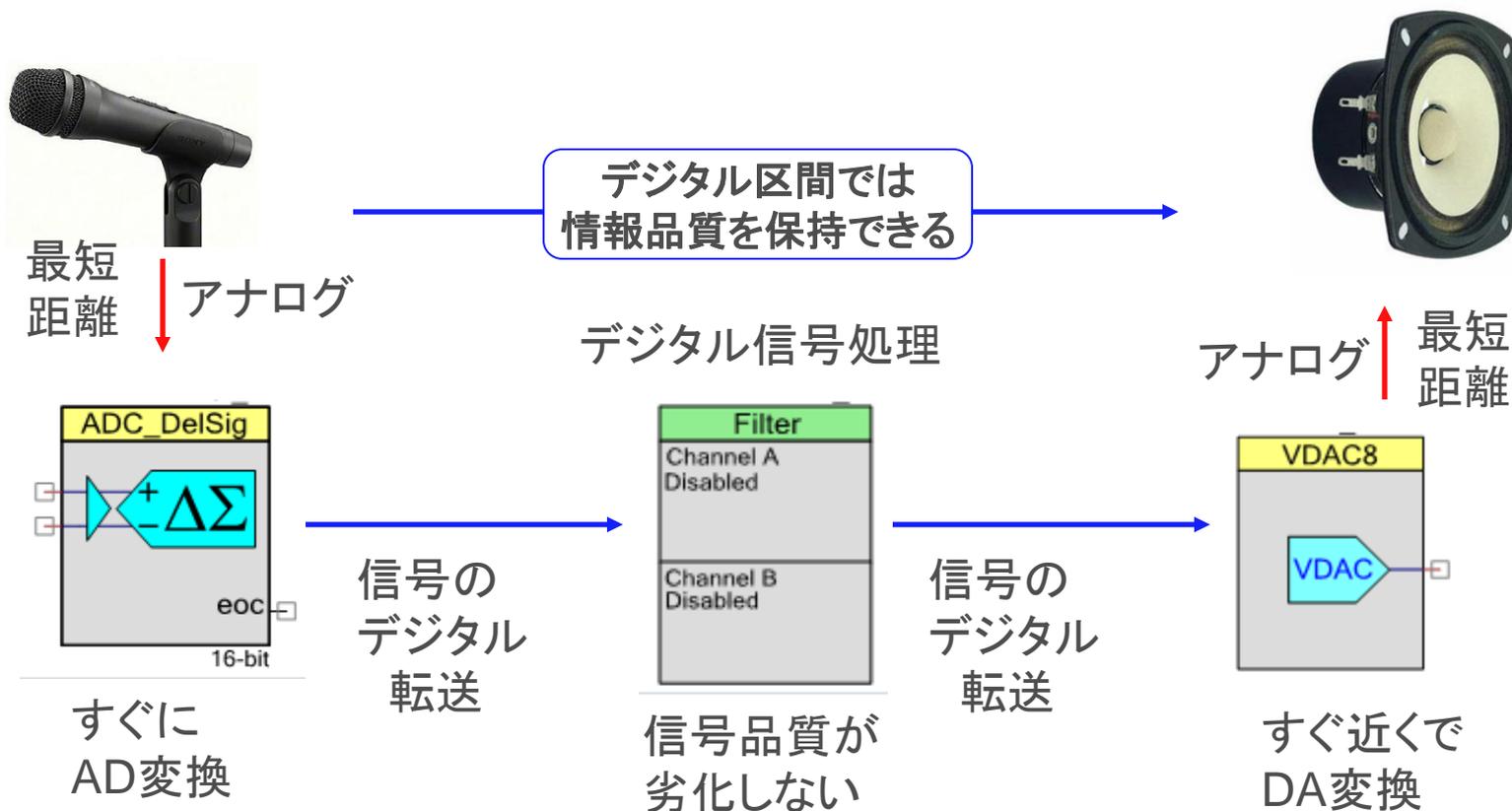
アナログとデジタル

A/D変換で一部の情報は失われるが、変換後のデータの信頼性は高く保つことが容易になります。



実際のADとDA

センサなどの微弱な信号の出力は、なるべくセンサに近い場所でA/D変換します。信号の伝送は、デジタル化して行います。デジタル伝送後に再度DA変換します。



離散フーリエ変換

フーリエ変換では、数学的な導出で連続量が前提でしたが、実際の物理現象を数値的に解析し、これを計算処理する場合には、その値は離散量になります。そのため離散量に対してフーリエ変換を行なうものが、離散フーリエ変換です。

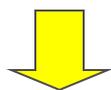
連続変化の関数から、離散量を得るためには、ディラックの(デルタ関数(時間軸の幅がゼロで振幅が ∞ で積分値が1の超関数))と関数にかけて積分します。

続いて、得られた離散値に複素正弦関数の離散値をかけて積分します。

これは、そのまま行列積の計算になります。かけて積分することは、離散値に含まれる、複素正弦関数の離散値成分を抽出すること、相関、内積をとることになります。

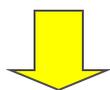
フーリエ変換式(連続関数)から、離散フーリエ変換式を導出する方法もありますが、周期関数から線スペクトルを得る複素フーリエ級数式からの導出が理解しやすいと思います。理由は、フーリエ級数も離散フーリエ変換も**周期関数**のためです。

フーリエ級数: **周期関数**を三角関数で表現



オイラーの公式

複素フーリエ級数: 複素数に拡張
線スペクトル(もとの関数は**周期関数**)

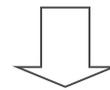


離散フーリエ変換: **周期関数化**無限繰り返しとして、周波数スペクトルを計算

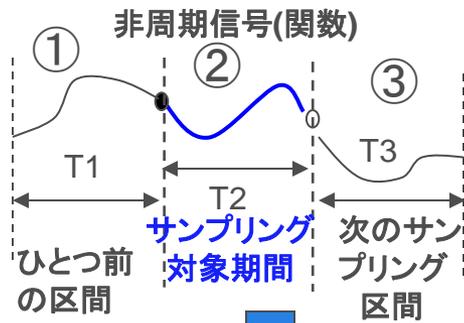
積分区間を無限大に



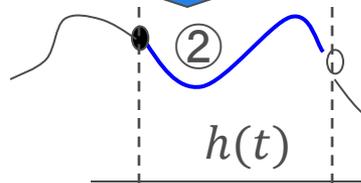
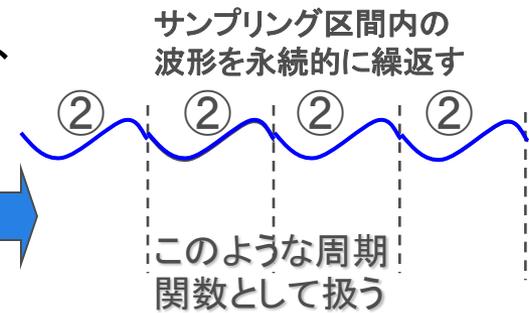
フーリエ変換: **非周期関数、連続スペクトル化**



離散フーリエ変換とサンプリングのサイクル



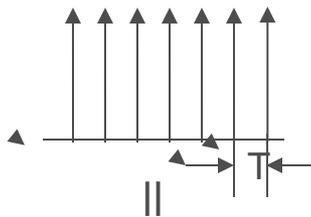
連続して変化する(非周期の)信号を、一定時間の枠でサンプリングして、切り取ります。そしてこの波形が連続して繰り返すものと仮定して、**周期関数**としてフーリエ変換します。



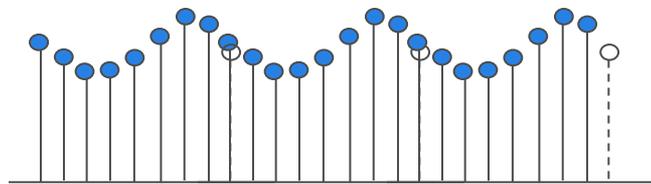
周期的時間関数

次のサンプリングサイクルでも同様に周期化し、これを連続して繰り返していきます

X (乗算)

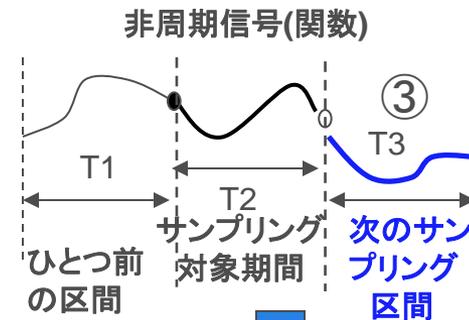


δ 関数の乗算 (サンプリング)



計算上の繰り返しが現れる

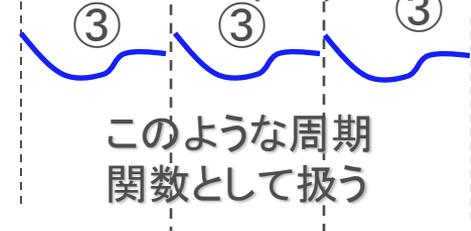
連続して連続して変化する信号も次から次と切り出して変換していけばサンプリング周波数単位の変化を捉えることとなります



非周期信号(関数)

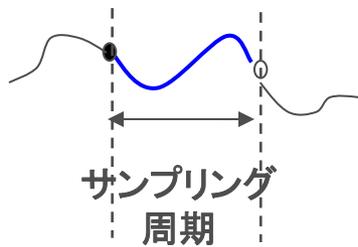


周期信号(関数)化

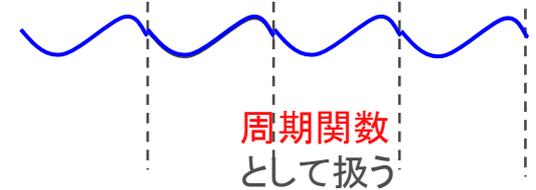


このように周期関数として扱う

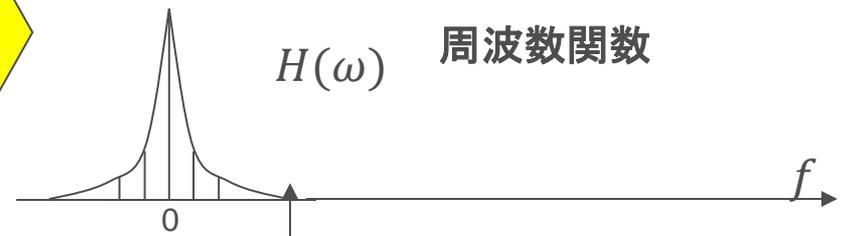
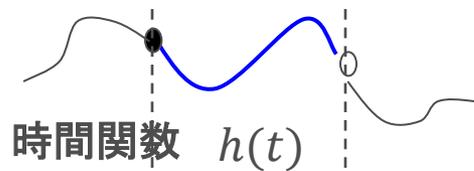
離散フーリエ変換とサンプリング



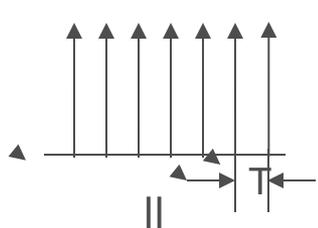
連続して変化する、非周期の信号を、一定時間の枠でサンプリングして、切り取ります。そしてこの波形が連続して繰り返すものと仮定すれば、**周期関数**として扱えることになります。



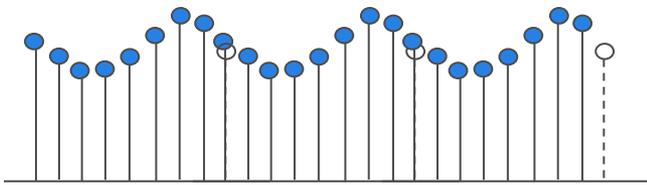
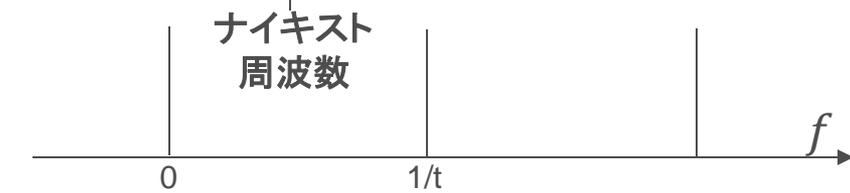
IDFT: Inversed Discrete Fourier Transform DFT: Discrete Fourier Transform



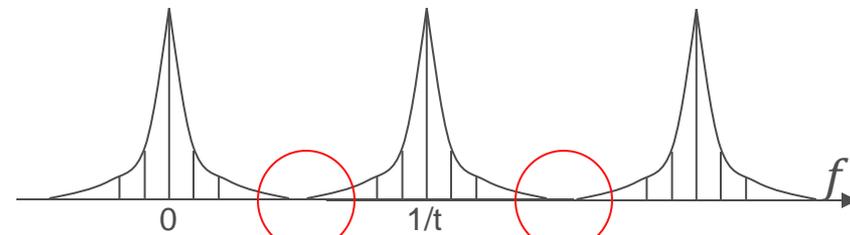
X (乗算)



δ 関数の乗算 (サンプリング)

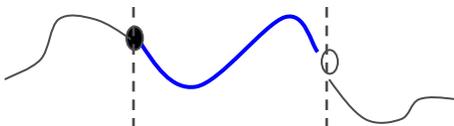


繰り返しが現れる

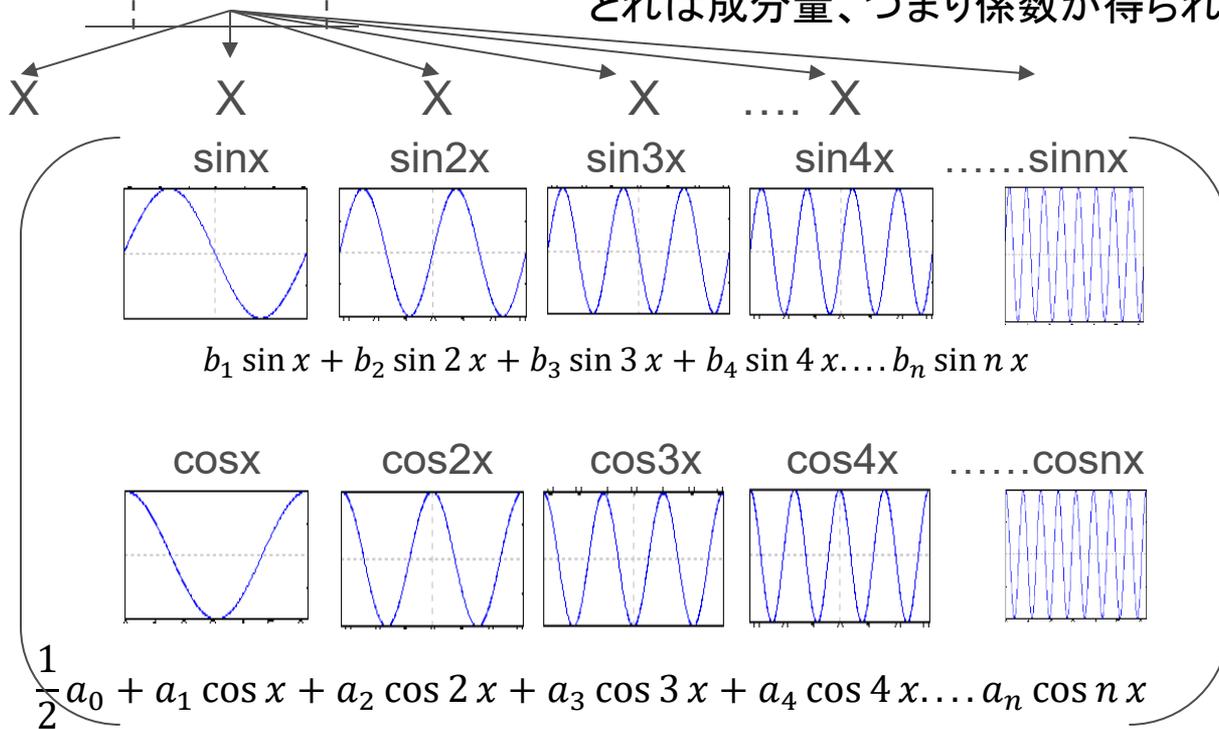


ここが重なるとエイリアシング

対象信号に対する、正弦、余弦成分の抽出(相関)



フーリエ変換は、整数倍の正弦、余弦信号の総和で表すことでした。このとき係数は、その成分を表すこととなりますから、もとの関数(信号)に正弦、余弦関数をかけて、その相関をとれば成分量、つまり係数が得られることになります。



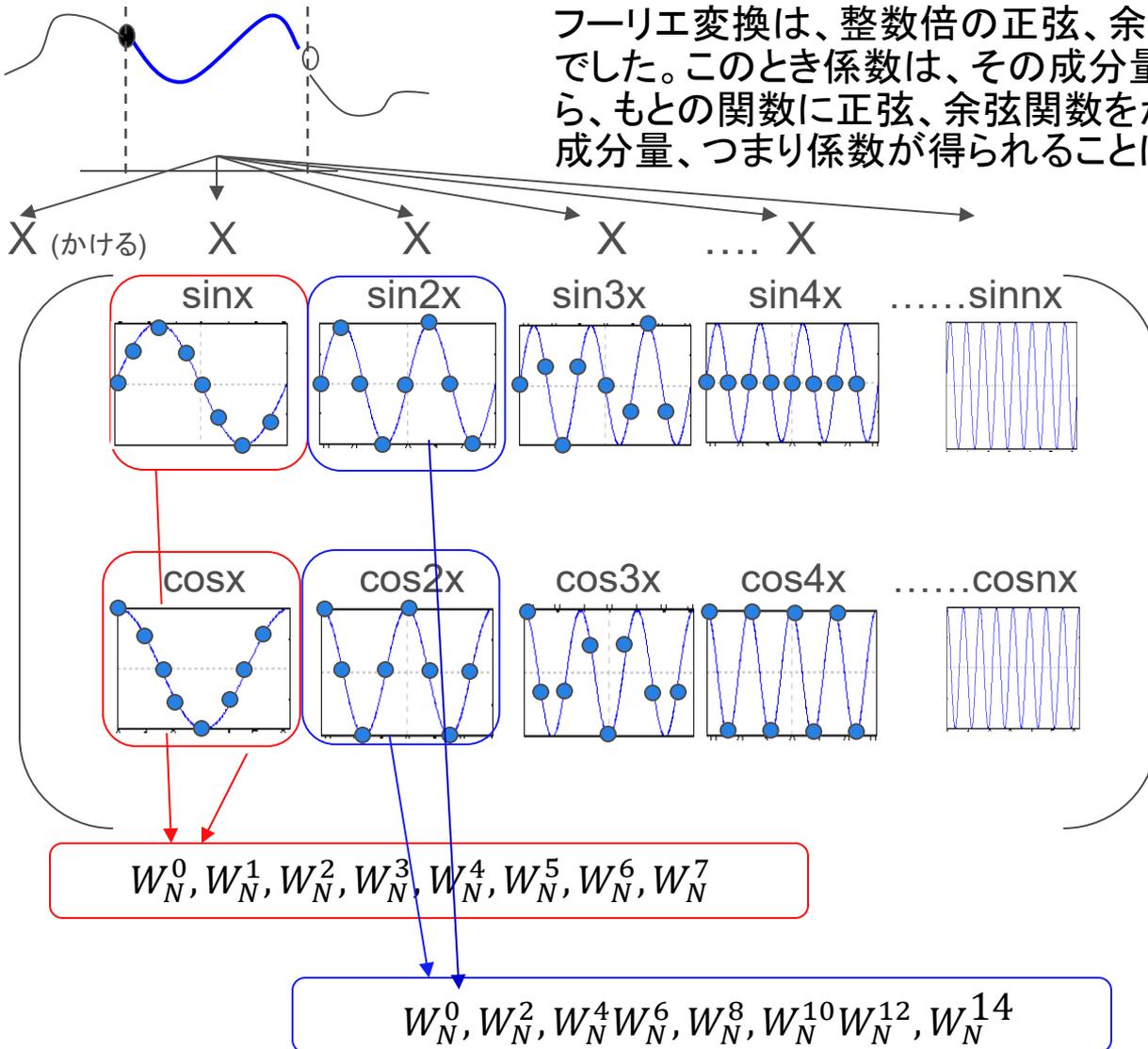
複素数表現では、かける正弦、余弦をひとつの複素数で表現することができます。

複素数化 e^{-jnx}

この級数和が、三角関数表現のフーリエ級数になります

以降の図は、8ポイントを例にして説明してあります。

離散化した正弦、余弦値の乗算

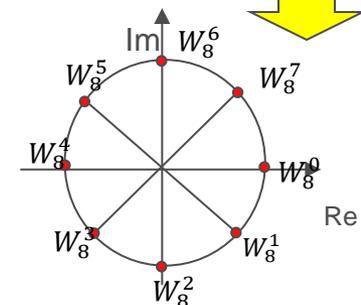


フーリエ変換は、整数倍の正弦、余弦信号の総和で表すことでした。このとき係数は、その成分を表すことになりまから、もとの関数に正弦、余弦関数をかけて、その相関をとれば成分量、つまり係数が得られることになります。

複素数表現では、かける正弦、余弦をひとつの複素数で表現することができます。

複素数化 $\rightarrow e^{-jnx}$

DFTでは、値は離散値で、 n はポイント数になります。



1の冪根(テキスト2の復習)

- オイラーの公式と三角関数の周期性から、

$$e^{j2n\pi} = \cos 2n\pi + j \sin 2n\pi = 1 \quad (n \text{ は整数})$$

$$W^m = e^{j2n\pi}$$

$$= 1 \quad (m \text{ は整数}) \text{ とおくと } W \text{ は } 1 \text{ の } m \text{ 乗根}$$

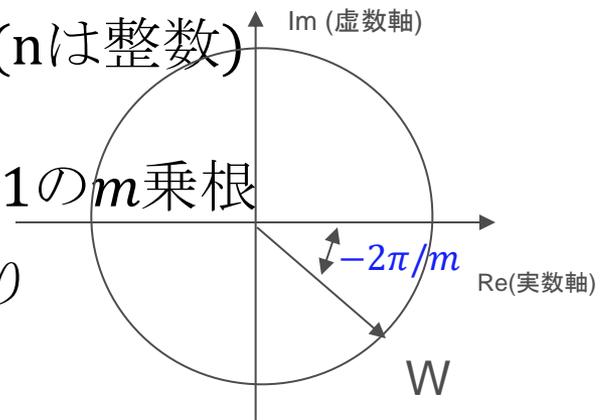
$$W = e^{j2\pi \frac{n}{m}} \quad \text{ド・モアブルの定理より}$$

$$e^{j2\pi \frac{n}{m}} = \cos 2\pi \frac{n}{m} + j \sin 2\pi \frac{n}{m}$$

n

$= 0, 1, 2, \dots$ を代入、円周を $\frac{1}{m}$ に分割した場所に解が存在

$$\text{ついでに } e^{-j2\pi \frac{n}{m}} \text{ は、 } \cos 2\pi \frac{n}{m} - j \sin 2\pi \frac{n}{m}$$



回転子の導入

\sin の項と \cos の項を回転子 W を導入し複素数にまとめます。

n 倍の周波数の \sin と \cos の項は、回転子 W の n 乗で表すことができます。

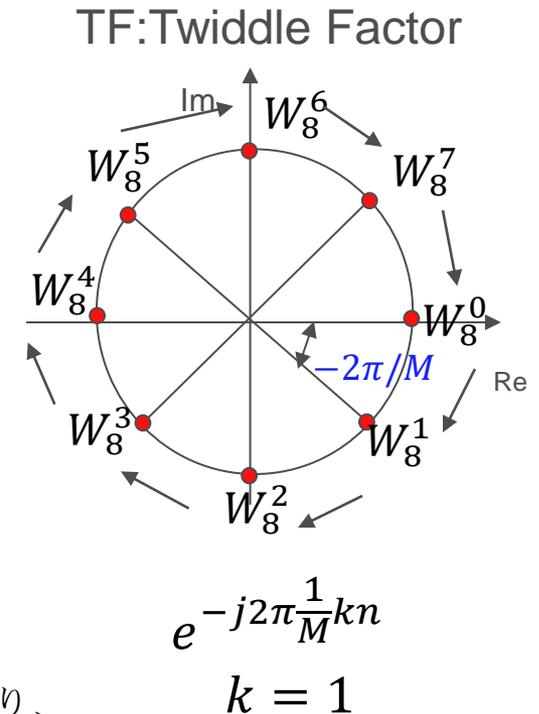
$e^{a*b} = (e^a)^b$ ですから、1の M 乗根を W_M として

$$W_M = e^{-j2\pi\frac{1}{M}} \quad \text{とおくと}$$

$$W_M^2 = e^{-j2\pi\frac{2}{M}}, W_M^3 = e^{-j2\pi\frac{3}{M}}, W_M^4 = e^{-j2\pi\frac{4}{M}} \dots W_M^n = e^{-j2\pi\frac{n}{M}}$$

となりますから、整数倍の周波数成分が、 W_M^n の形で表され、 W_M^n はすべて単位円の円周上にあり、 $\frac{2\pi}{M}$ の角度で回転していきます。

W のことを回転子(*Twiddle Factor*, ひねり因子)と呼びます。

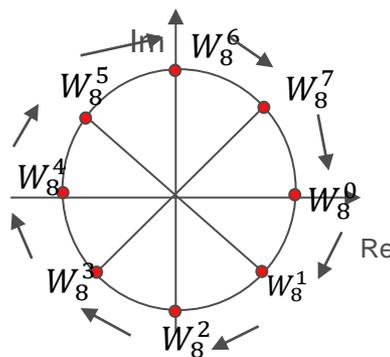
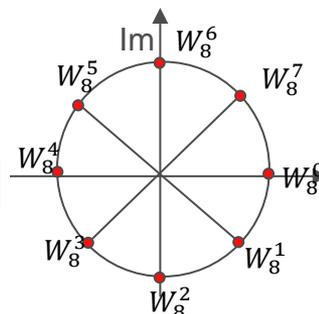


基底周波数成分 D_1 の相関計算 ($k = 1$)

離散フーリエ変換では、 N ポイントの離散値に対して、離散化した複素指数(正弦)関数をかけて、整数倍の周波数に相当する成分(係数に相当)を計算します(複素指数関数では、 \sin, \cos をひとつにして計算できます。)

$$D_1 = h_0 W_8^0 + h_1 W_8^1 + h_2 W_8^2 + h_3 W_8^3 + h_4 W_8^4 + h_5 W_8^5 + h_6 W_8^6 + h_7 W_8^7$$

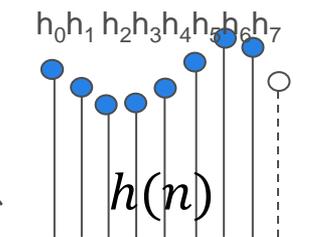
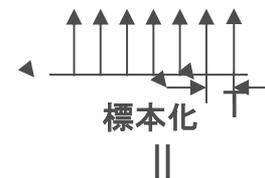
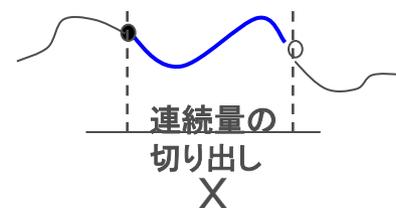
行列演算



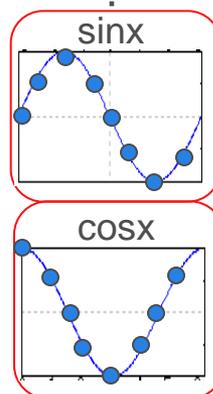
TF: Twiddle Factor

$k = 1$
基底周波数

$$e^{-j2\pi \frac{1}{M} kn}$$



n ポイントの
離散値
この例では
 $n=8$



n ポイントの
離散値
この例では
 $n=8$

基底周波数成分 $D_1(k=1)$ と行列

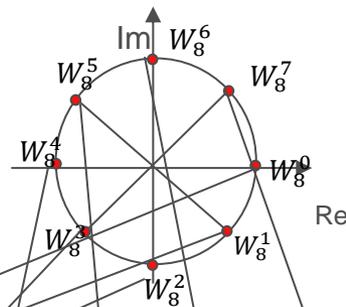
D_0 が、定数項(直流項),
 D_1 が基底周波数成分, (最小分解能)
 複素数($p + qj$)

D_2 が(2x基底周波数)成分,
 D_3 が(3x基底周波数)成分,

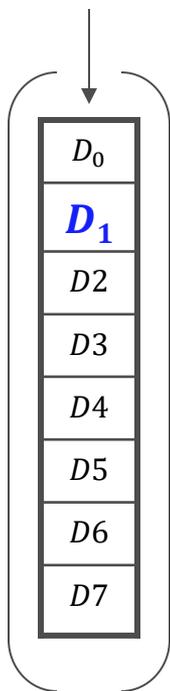
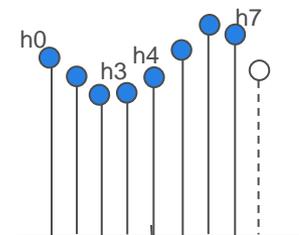
振幅スペクトル $|Z| = \sqrt{p^2 + q^2}$

複素指数関数値

$$e^{-j2\pi \frac{1}{M} kn}$$

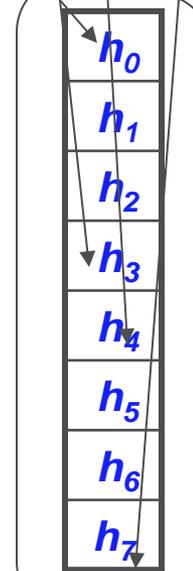


入力離散値



= 1/8

W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
W^0	W^2	W^4	W^6	W^8	W^{10}	W^{12}	W^{14}
W^0	W^3	W^6	W^9	W^{12}	W^{15}	W^{18}	W^{21}
W^0	W^4	W^8	W^{12}	W^{16}	W^{22}	W^{26}	W^{30}
W^0	W^5	W^{10}	W^{15}	W^{20}	W^{25}	W^{30}	W^{35}
W^0	W^6	W^{12}	W^{18}	W^{24}	W^{30}	W^{36}	W^{42}
W^0	W^7	W^{14}	W^{21}	W^{28}	W^{35}	W^{42}	W^{49}



$W^0 := W_8^0$ の略, W_8 は8乗根

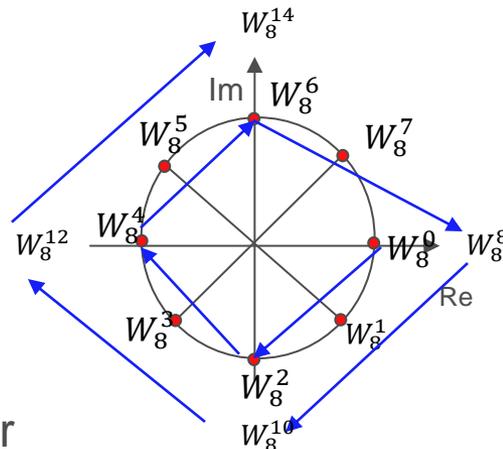
$$D_1 = h_0 * W^0 + h_1 * W^1 + h_2 * W^2 + h_3 * W^3 + h_4 * W^4 + h_5 * W^5 + h_6 * W^6 + h_7 * W^7$$

2倍基底周波数成分 D_2 の相関計算($k = 2$)

D_2 は、基底周波数の2倍
($k = 2$)の周波数成分になります。
(三角関数では、 $\sin 2x, \cos 2x$ の項)
複素指数関数のTFでは、2乗は2倍の
回転角を進みます。

$$D_2 = h_0 W_8^0 + h_1 W_8^2 + h_2 W_8^4 + h_3 W_8^6 + h_4 W_8^8 + h_5 W_8^{10} + h_6 W_8^{12} + h_7 W_8^{14}$$

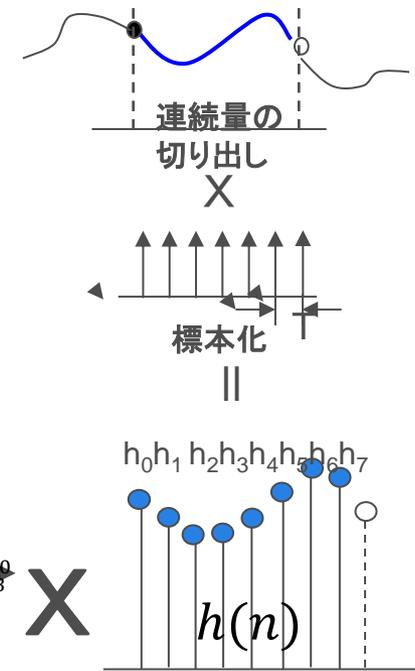
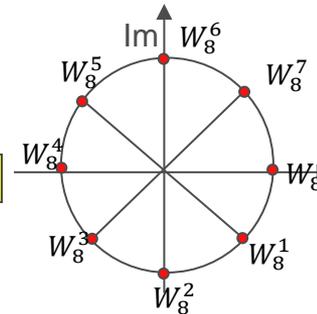
行列演算



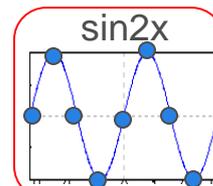
TF: Twiddle Factor

$k = 2$
基底周波数

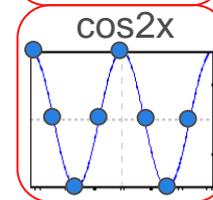
$$e^{-j2\pi \frac{1}{M} kn}$$



n ポイントの
離散値
この例では
 $n=8$



n ポイントの
離散値
この例では
 $n=8$

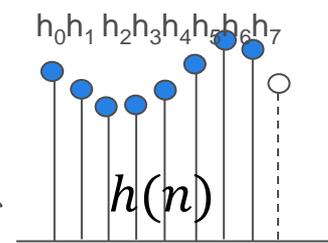
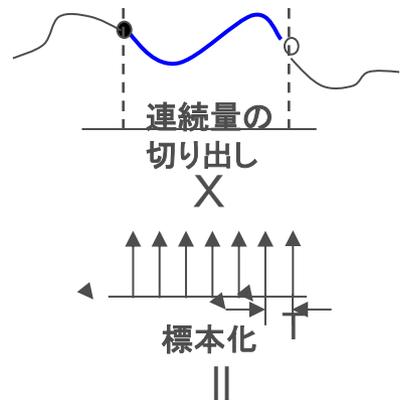
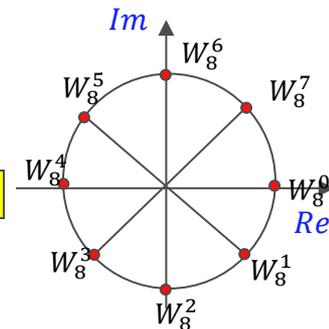


3倍基底周波数成分 D_3 の相関計算($k = 3$)

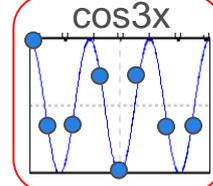
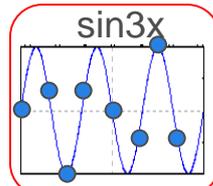
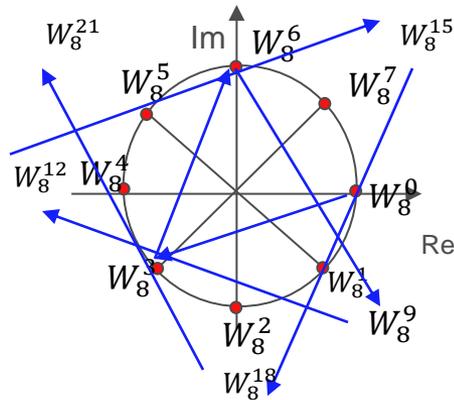
D_3 は、基底周波数の3倍
($k = 3$)の周波数成分になります。
(三角関数では、 $\sin 3x, \cos 3x$ の項)
複素指数関数のTFでは、3乗は3倍の
回転角を進みます。

$$D_2 = h_0 W_8^0 + h_1 W_8^3 + h_2 W_8^6 + h_3 W_8^9 + h_4 W_8^{12} + h_5 W_8^{15} + h_6 W_8^{18} + h_7 W_8^{21}$$

← 行列演算



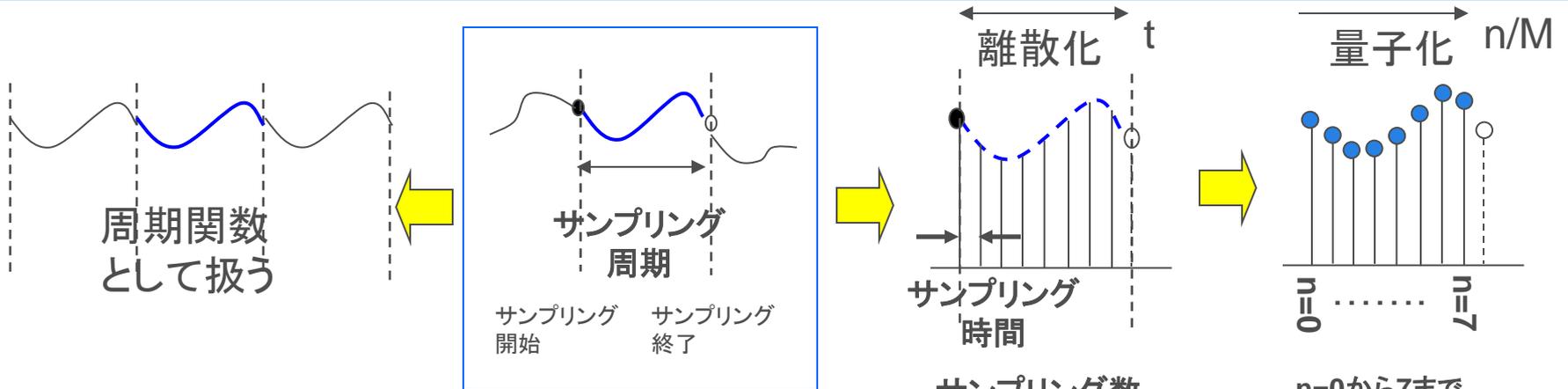
nポイントの
離散値
この例では
n=8



nポイントの
離散値
この例では
n=8

TF: Twiddle Factor

離散フーリエ係数式



複素フーリエ係数式

$$C_{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^T f(t) e^{-j2\pi\frac{1}{T}kt} dt \dots (8)$$

離散フーリエ係数式

$$D_{(k)} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(h_{(n)} e^{-j2\pi\frac{1}{M}kn} \right) \dots (18)$$

Mは、周期あたりの信号の標本化数でこれにサンプリング時間(t_{sample})を乗じると1周期の時間が得られます。(この区間の波形が永続的に繰り返されると考える) サンプリング時間をMポイントに分割して、離散化と量子化を行います。

(8)式の連続量に対する複素フーリエ級数式を離散量に対応させると(18)式の離散フーリエ係数式になります。基本周期区間の積分が、標本化時間内の離散値とこれに対応する複素指数関数の離散値の積和に対応します。

複素フーリエ級数のCn項に対応すると考えてもいいです。

演習問題 4.1

演習 4.1

フーリエ級数と離散フーリエ変換の相違点、相似点を表にまとめよ。

DFTとIDFTの変換対

離散フーリエ変換(*DiscreteFourieTransform*)

$$D(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} (h(n)e^{-j2\pi\frac{1}{M}kn}) \dots (18)$$

逆(*Inverse*)離散フーリエ変換

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M-1} (D(k)e^{j2\pi\frac{1}{M}kn}) \dots (19)$$

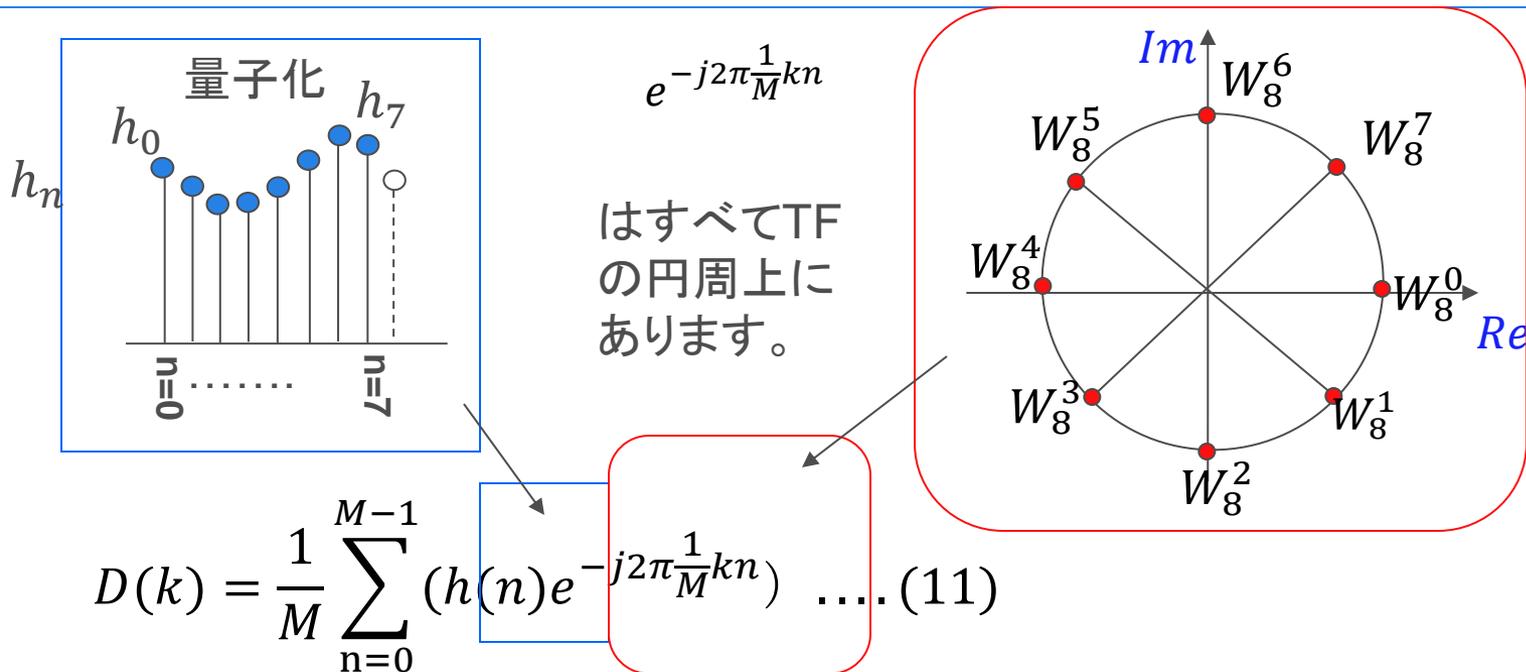
*TF*で表すと

*DFT*は $D(k)$

$$= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} (h(n)W_M^n) \dots (20)$$

$$IDFTは $h(n) = \sum_{k=0}^{M-1} (D(k)W_M^{-n}) \dots (21)$$$

サンプリング値とTwiddle Factorの積和



入力信号は、離散化と量子化により離散データに変換されました。続いて対応するTF(Twiddle Factor)との積和計算を行います。

$M = 8$ の場合で考えると、1つの周波数ごとに、8ポイントの入力離散値と8ポイントのTFを乗算し、これらの結果の総和(相関)を求め平均(1/8)します。

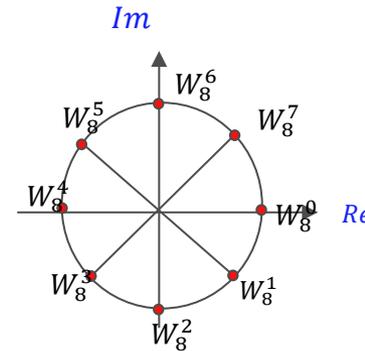
周波数項は0から7までありますから、これを8回繰り返します。1回目の総和は、基底x0周波数($n = 0$)の成分量、2回目の総和は、基底x1周波数($n = 1$)、3回目の総和は、基底x2周波数($n = 2$).....と $n = 7$ まで計算します。

行列演算(行列積)でDFTを求める

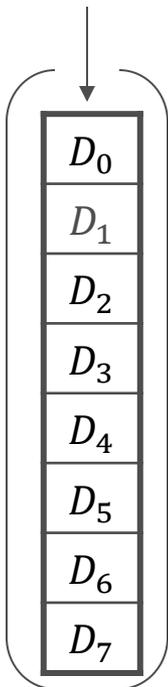
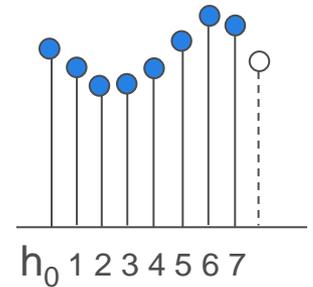
D_0 が、定数項(直流項),
 D_1 が基底周波数成分,(最小分解能)
 D_2 が(2x基底周波数)成分,
 D_3 が(3x基底周波数)成分,
 D_4 おいて、 N が大きくなると標本化定理から正しい値を持たなくなる場合(別項)がある

複素指数関数値

$$e^{-j2\pi\frac{1}{M}kn}$$



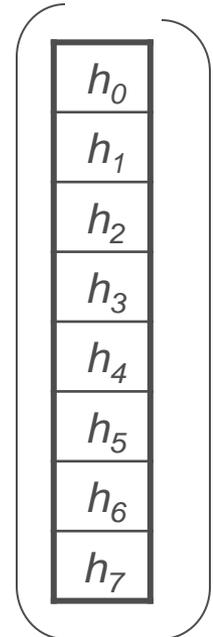
入力離散値



$= 1/8$

W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
W^0	W^2	W^4	W^6	W^8	W^{10}	W^{12}	W^{14}
W^0	W^3	W^6	W^9	W^{12}	W^{15}	W^{18}	W^{21}
W^0	W^4	W^8	W^{12}	W^{16}	W^{20}	W^{24}	W^{28}
W^0	W^5	W^{10}	W^{15}	W^{20}	W^{25}	W^{30}	W^{35}
W^0	W^6	W^{12}	W^{18}	W^{24}	W^{30}	W^{36}	W^{42}
W^0	W^7	W^{14}	W^{21}	W^{28}	W^{35}	W^{42}	W^{49}

$W^0 := W_8^0$ の略, W_8 は8乗根

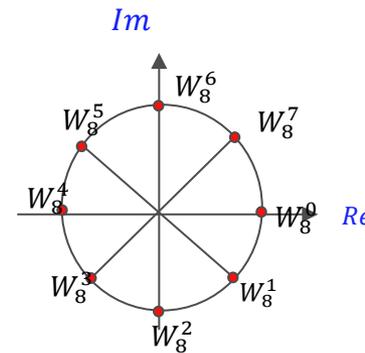


TFの積和演算の意味

かけるTFの値は基底周波数の整数倍の複素正弦関数の値、この和で信号に含まれる各周波数成分との相関をとる

複素指数関数値
 $e^{-j2\pi\frac{1}{M}kn}$

$W^0 := W_8^0$ の略



定数項、直流成分

基底周波数成分

基底X2倍周波数成分

基底X3倍周波数成分

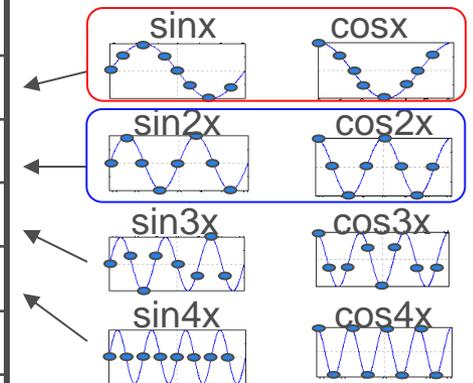
基底X4倍周波数成分

基底X5倍周波数成分

基底X6倍周波数成分

基底X7倍周波数成分

W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
W^0	W^2	W^4	W^6	W^8	W^{10}	W^{12}	W^{14}
W^0	W^3	W^6	W^9	W^{12}	W^{15}	W^{18}	W^{21}
W^0	W^4	W^8	W^{12}	W^{16}	W^{20}	W^{24}	W^{28}
W^0	W^5	W^{10}	W^{15}	W^{20}	W^{25}	W^{30}	W^{35}
W^0	W^6	W^{12}	W^{18}	W^{24}	W^{30}	W^{36}	W^{42}
W^0	W^7	W^{14}	W^{21}	W^{28}	W^{35}	W^{42}	W^{49}



$W^0 := W_8^0$ の略, W_8 は8乗根

D0からD7の項の意味

D_0 が、定数項(直流項), D_1 が基底周波数成分,(最小分解能)複素数($p + qj$),
 D_2 が(2x基底周波数)成分, D_3 が(3x基底周波数)成分, 振幅スペクトル $|Z| = \sqrt{p^2 + qb^2}$

D_0
D_1
D_2
D_3
D_4
D_5
D_6
D_7

$$D_k \text{ (複素数表現 } p + qj) \\ = a_n \cos nx \\ + b_n \sin nx \text{ (三角関数表現)}$$

x が基底周波数、 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
 振幅スペクトルは、 $\sqrt{p^2 + q^2}$

- D_0 = 定数項、直流成分
- D_1 = 基底周波数の成分量
- D_2 = 基底X2倍の周波数成分量
- D_3 = 基底X3倍の周波数成分量
- ⋮

D7まで同様に計算

フーリエ変換における連続量の積分が、
 離散量の積和演算の総和に対応します。

フーリエ級数の線スペクトル項の和が
 離散量の成和演算の総和に対応します。

D0からD7まで計算

D_0 が、定数項(直流項), D_1 が基底周波数成分,(最小分解能)複素数($p + jq$), D_2 が(2x基底周波数)成分, D_3 が(3x基底周波数)成分, 振幅スペクトル $|Z| = \sqrt{p^2 + qb^2}$



$W^0 := W_8^0$ の略, W_8 は8乗根

$$D_0 = h_0 * W^0 + h_1 * W^0 + h_2 * W^0 + h_3 * W^0 + h_4 * W^0 + h_5 * W^0 + h_6 * W^0 + h_7 * W^0$$

$$D_1 = h_0 * W^0 + h_1 * W^1 + h_2 * W^2 + h_3 * W^3 + h_4 * W^4 + h_5 * W^5 + h_6 * W^6 + h_7 * W^7$$

$$D_2 = h_0 * W^0 + h_1 * W^2 + h_2 * W^4 + h_3 * W^6 + h_4 * W^8 + h_5 * W^{10} + h_6 * W^{12} + h_7 * W^{14}$$

⋮

D_7 まで同様に計算

Twiddle Factorの値の再考

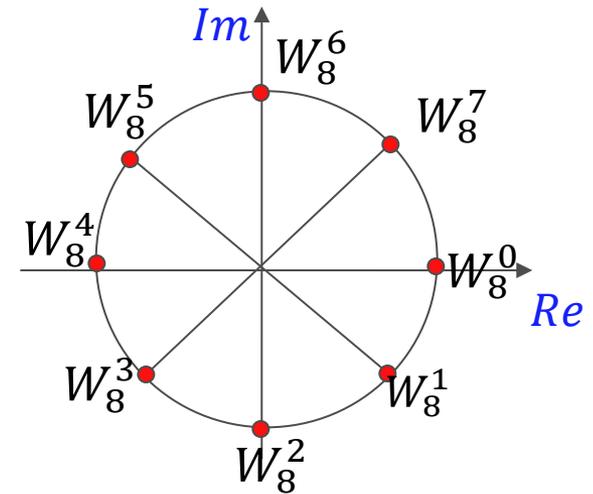
W^n はガウス平面上を右回りに回転している。

$W^8 = W^0,$

$W^{10} = W^2 \dots etc$

mod (剰余)をとって乗数にすればよいことになります。

$N = 8$ ですと8で割った余りです。複素指数関数値



- 0のまま
- 1つとび
- 2つとび
- 3つとび
- 4つとび
- 5つとび
- 6つとび
- 7つとび

W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
W^0	W^2	W^4	W^6	W^8	W^{10}	W^{12}	W^{14}
W^0	W^3	W^6	W^9	W^{12}	W^{15}	W^{18}	W^{21}
W^0	W^4	W^8	W^{12}	W^{16}	W^{22}	W^{26}	W^{30}
W^0	W^5	W^{10}	W^{15}	W^{20}	W^{25}	W^{30}	W^{35}
W^0	W^6	W^{12}	W^{18}	W^{24}	W^{30}	W^{36}	W^{42}
W^0	W^7	W^{14}	W^{21}	W^{28}	W^{35}	W^{42}	W^{49}

$$e^{-j2\pi \frac{1}{M}kn}$$

$W^0 := W_8^0$ の略, W_8 は8乗根

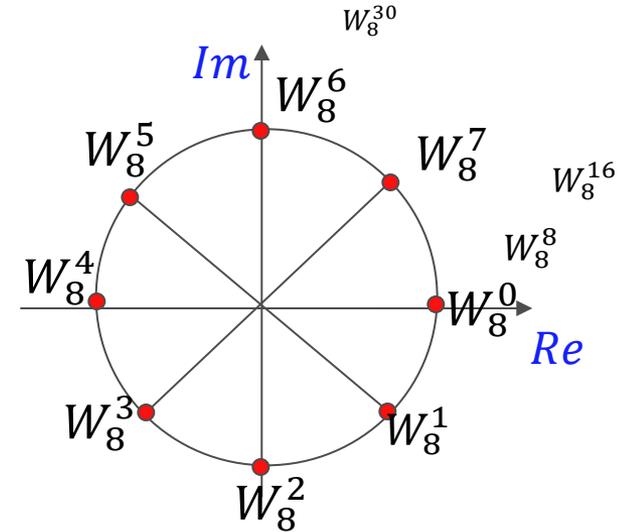
Twiddle Factorの値の置き換え

ω は1の冪根ですから、その N 乗値は、
 ガウス平面上を単位角 $\left(\frac{2\pi}{N}\right)$ ずつ右に回転します。
 n 乗は単位角の n 倍になります。

複素指数関数値

W^0							
W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
W^0	W^2	W^4	W^6	W^0	W^2	W^4	W^6
W^0	W^3	W^6	W^1	W^4	W^7	W^2	W^5
W^0	W^4	W^0	W^4	W^0	W^4	W^0	W^4
W^0	W^5	W^2	W^7	W^4	W^1	W^6	W^3
W^0	W^6	W^4	W^2	W^0	W^6	W^4	W^2
W^0	W^7	W^6	W^5	W^4	W^3	W^2	W^1

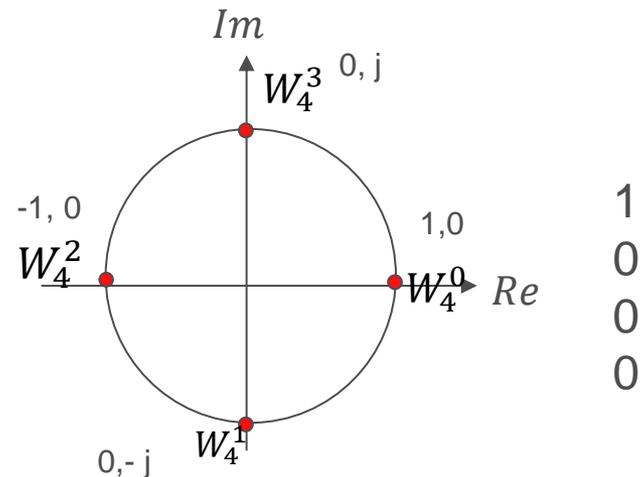
$W^0 := W_8^0$ の略, W_8 は8乗根



$$e^{-j2\pi\frac{1}{M}kn}$$

演習問題 4.2 DFTの計算演習

4ポイントのサンプリングで、以下の離散値が得られました。
 [得られた離散値は、1,0,0,0]
 TFの値のテーブルを作成し、行列演算でDFTを計算し、振幅値を求め、結果を考察してください。



1
0
0
0

= 1/4

演習問題 4.3/4.4 DFTの計算

演習 4.3 PSoC5を利用して、この4点DFTを計算するコードを記述せよ。入力離散値 $[1,0,0,0]$ と、TFは、それぞれ別の定数テーブルにしておくこと。計算結果をLCDに表示すること。

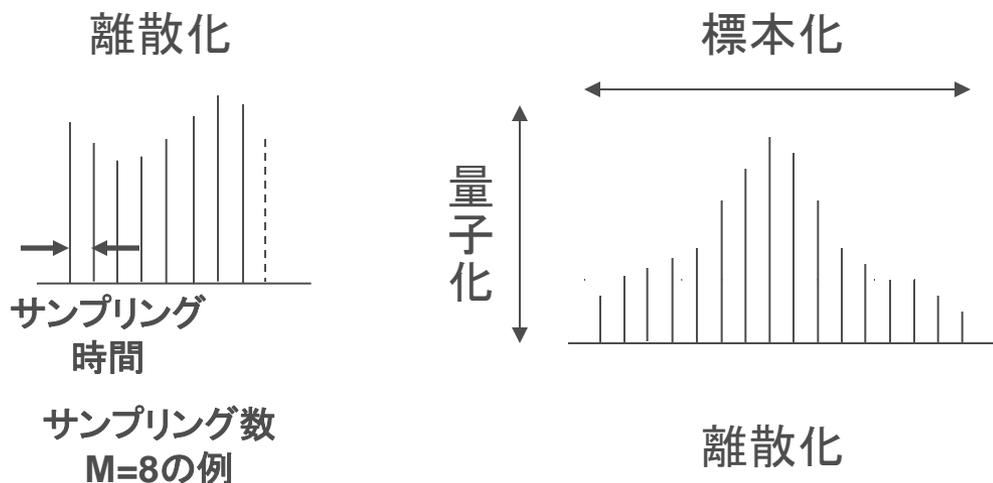
演習 4.4 Maxima を利用して、以下の8点DFTを計算せよ。
入力離散値 $[1,0,0,0,0,0,0,0]$

AD変換器のサンプリング周波数

サンプリング周波数とその周期は、標本化定理により最大処理周波数($\frac{1}{2}$ *サンプリング周波数)を決定します。

また後段の演算処理は、この周波数レートで連続的に送り込まれるデータの1サイクル以内の時間で完了しなければなりません。

例題: AD変換器のサンプリング周波数が、 $7,812.5\text{Hz}$ の場合、処理可能な周波数はいくになるでしょうか？ また、この連続データを処理するための後続の演算系の処理時間(周期時間)は、何秒以内になるでしょうか？



AD変換器は、量子化ビット数が多くなると変換に時間がかかり、サンプリング周波数を上げづらくなってきます。

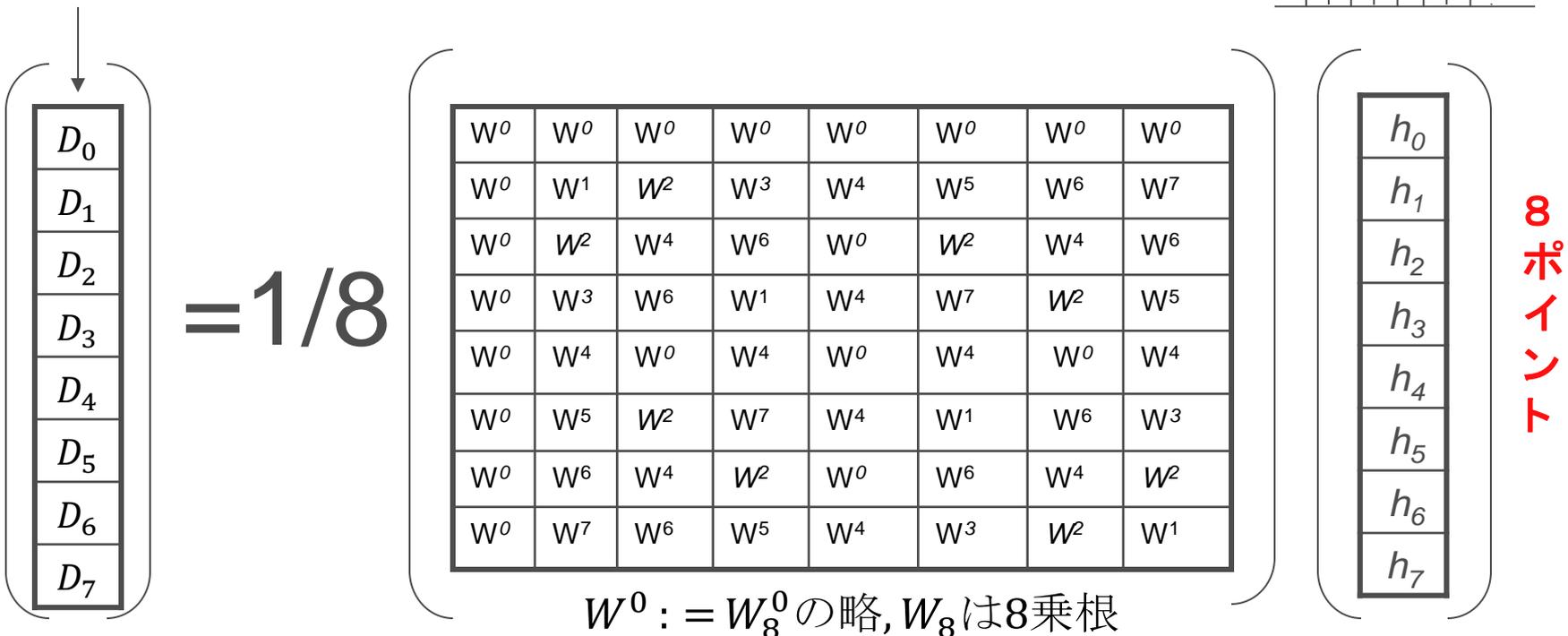
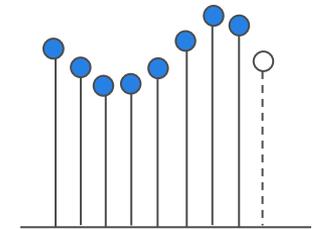
DFTのポイント数について

入力離散値は、連続した数値列としてAD変換器からサンプリング周期時間でどんどん送られてきます。

これを一定のポイント数単位でDFT演算処理します。

ポイント数は、FFT処理との互換性を考慮して 2^N (N :正の整数)としておきます。

入力離散値



ポイント数は何を意味するか

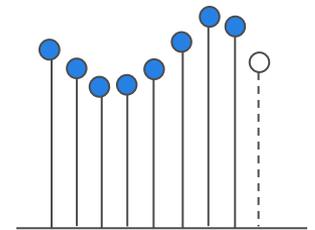
ポイント数によってDFTに切り出す区間が決まります。これがDFTの周期時間になります。

周期時間=(1/サンプリング周波数)*ポイント数

例題:サンプリング周波数が、**7,812.5Hz**でポイント数が**64**の場合、周期時間とその周波数はいくらでしょうか？

その周波数は、何を意味するのでしょうか？

入力離散値

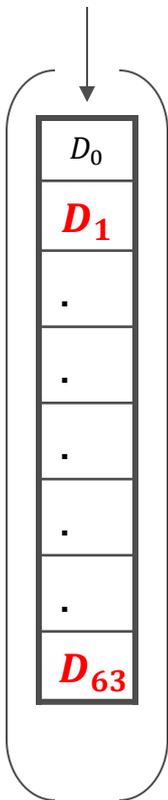
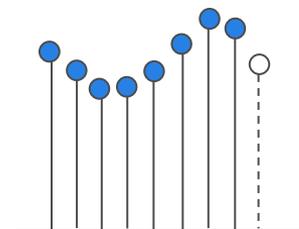


周期時間、分解周波数、最大周波数

ポイント数xサンプリング周期時間でDFTの周期時間が決定します。
 このとき行列演算の D_0 項は直流項、 D_1 項が、この周期時間の基底
 周波数で、DFTで解析する基本周波数の成分項になります

以下 D_2 項は、 D_1 の2倍、 D_n 項は、 N 倍の周波数の成分項になり
 ます。例題:サンプリング周波数が、 $7,812.5\text{Hz}$ でポイント数が
 64 の場合、扱える周波数の帯域はどこからどこまででしょうか？

入力離散値

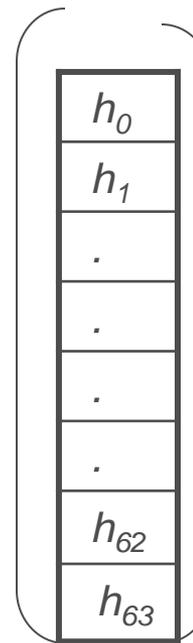


$$= 1/64$$

$$N=64$$

W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	-	W^0
W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	-	-
W^0	W^2	W^4	W^6	W^0	W^2	-	-
W^0	W^3	W^6	W^1	W^4	W^7	-	-
W^0	W^4	W^0	W^4	W^0	W^4	-	-
W^0	W^5	W^2	W^7	W^4	W^1	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
W^0	-	-	-	-	-	-	-

$$W^0 := W_{64}^0 \text{ の略, } W_{64} \text{ は } 64 \text{ 乗根}$$

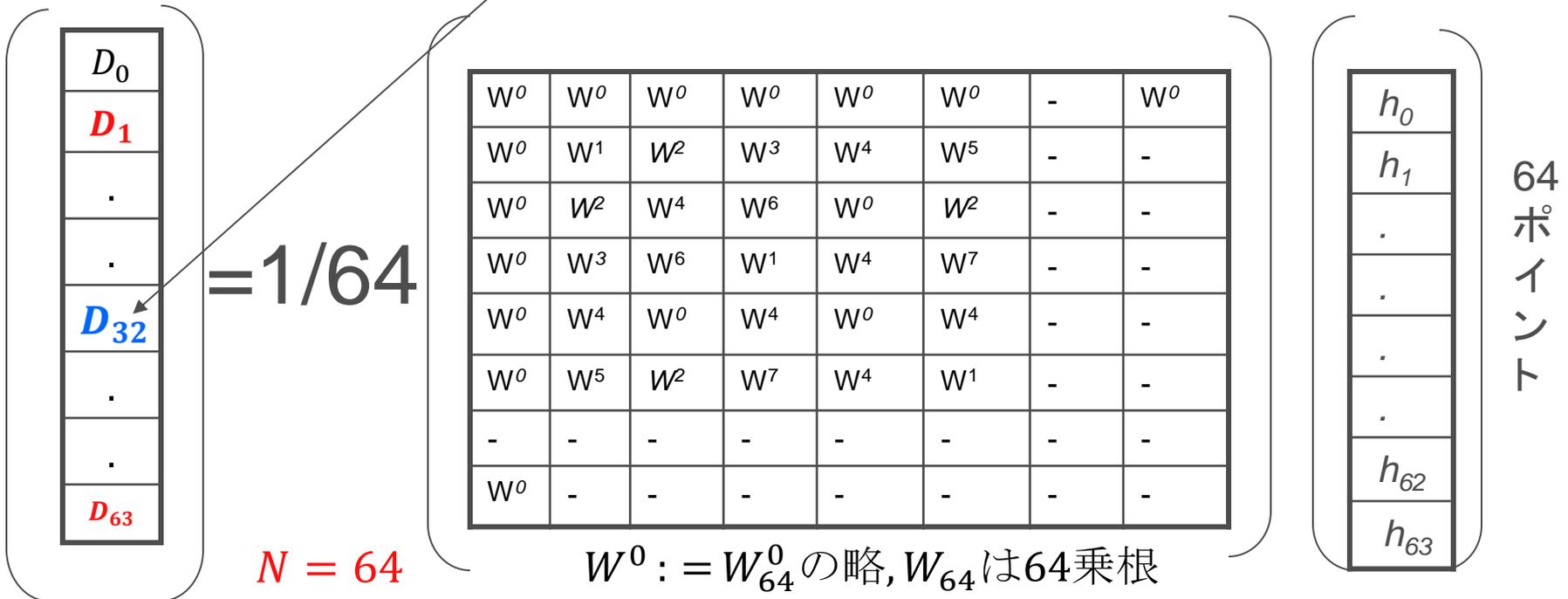
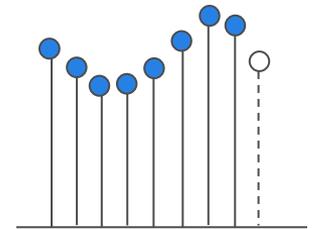


64ポイント

扱える周波数

サンプリング周波数が、 $7,812.5\text{Hz}$ (サンプリング時間 $128\mu\text{sec}$)で
 64ポイントDFTでは、DFT基底は約 8.192msec ($128\mu\text{sec} * 64$) ,
 つまり最低周波数は約 122Hz となります。一方最高周波数は
 $3,904\text{Hz}$ ($7812.5/2$)になります。 D_{32} : $122 * 32 = 3,904\text{Hz}$ を超えた項
 は、標本化定理により正しい値にならないためです。

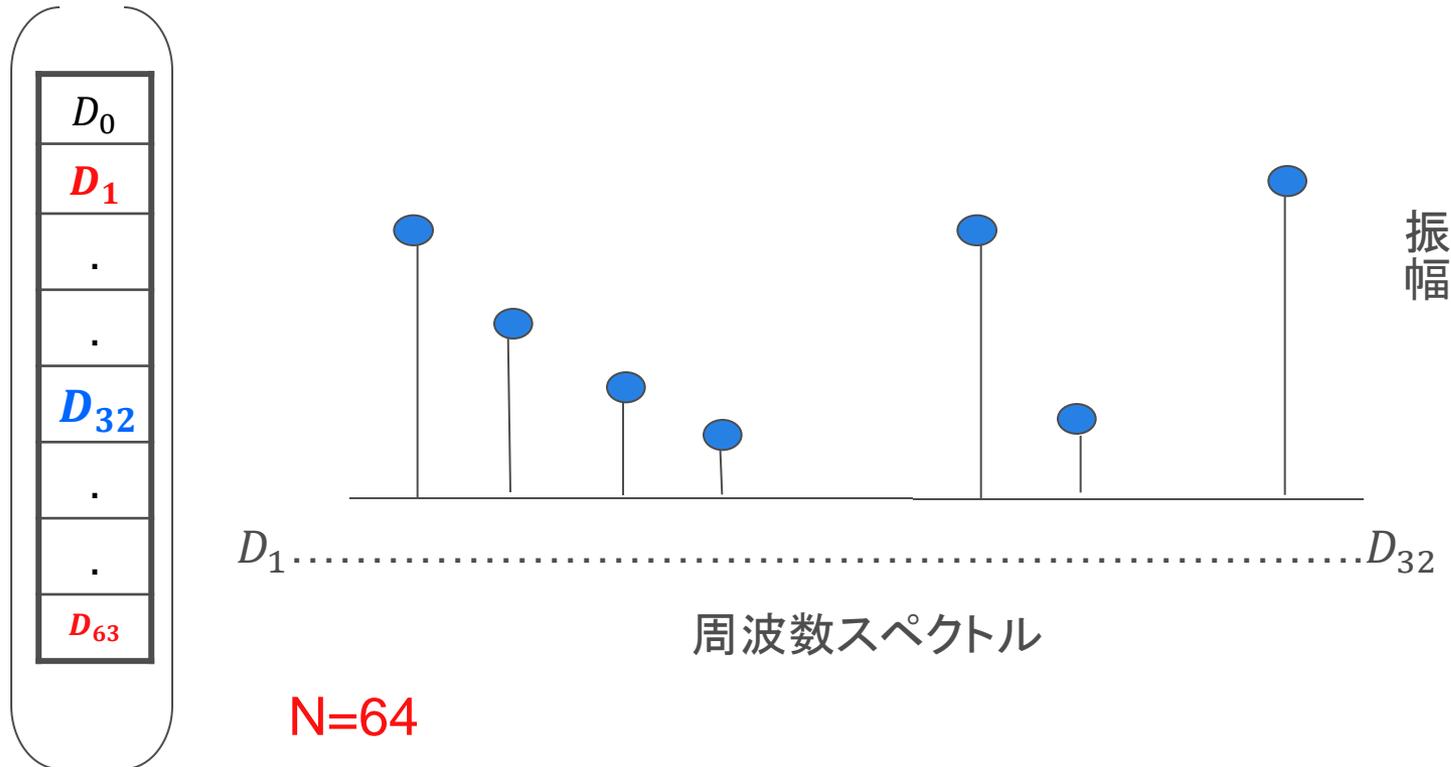
入力離散値



スペクトルの振幅計算

続いて、各周波数スペクトルの振幅を求めます。

D_1 の値は121Hzの複素数ベクトルですから、 $\sqrt{re^2 + im^2}$ で振幅を計算します。同様 D_2 は、242Hz、 D_3 は、363Hzと振幅を求めていきます。(re:実数部、im:虚数部)



設計実習に戻りシステムに実装

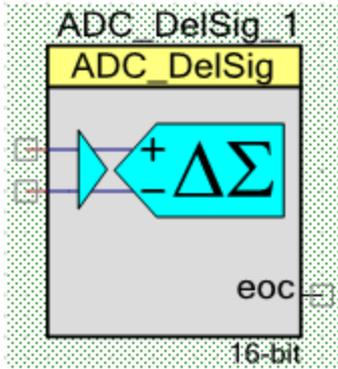
1. サンプル数は、 2^n ($n = 1, 2, \dots$) にすること(後のFFT用)
2. チップ内部に発振器を作る(いったんピンに出力する)
3. 入力ピンからデータを読み込むAD変換器を作る
4. DFTを計算して表示する

備考: システムのアーキテクチャ図を描くこと、設計に入る前に、発振周波数、サンプル数、サンプル・レートを計算してみる。ひとつひとつのブロックをくみ上げ、動作検証して、これらをまとめあげていく。時間の余裕がある人は、PCとの通信を作ったり、2次のDFTを作ったり、FFTを実装してよい。

ユニークなアイデアがあれば実装してみよう。

入力信号の”音程”だけを自由に可変する装置はどうしたら作れるだろうか。”早送り”しても音程が変わらない。時短ビデオの音声部など。フーリエ変換に弱点はあるか。その解決は。

ADC_DelSigのスペック



PSoC3/5のコンポーネント・カタログにあるADC_DelSigは、量子化ビットが、8から20bit (デバイスによる差異あり)

サンプルレートは、10spsから最大384Kspsです。

人間の可聴周波数帯を、20Hzから20KHzとして、デジタル・オーディオCDの規格は、サンプリング周波数を44.1KHz(約22μsec)量子化ビットを16ビットとしています。

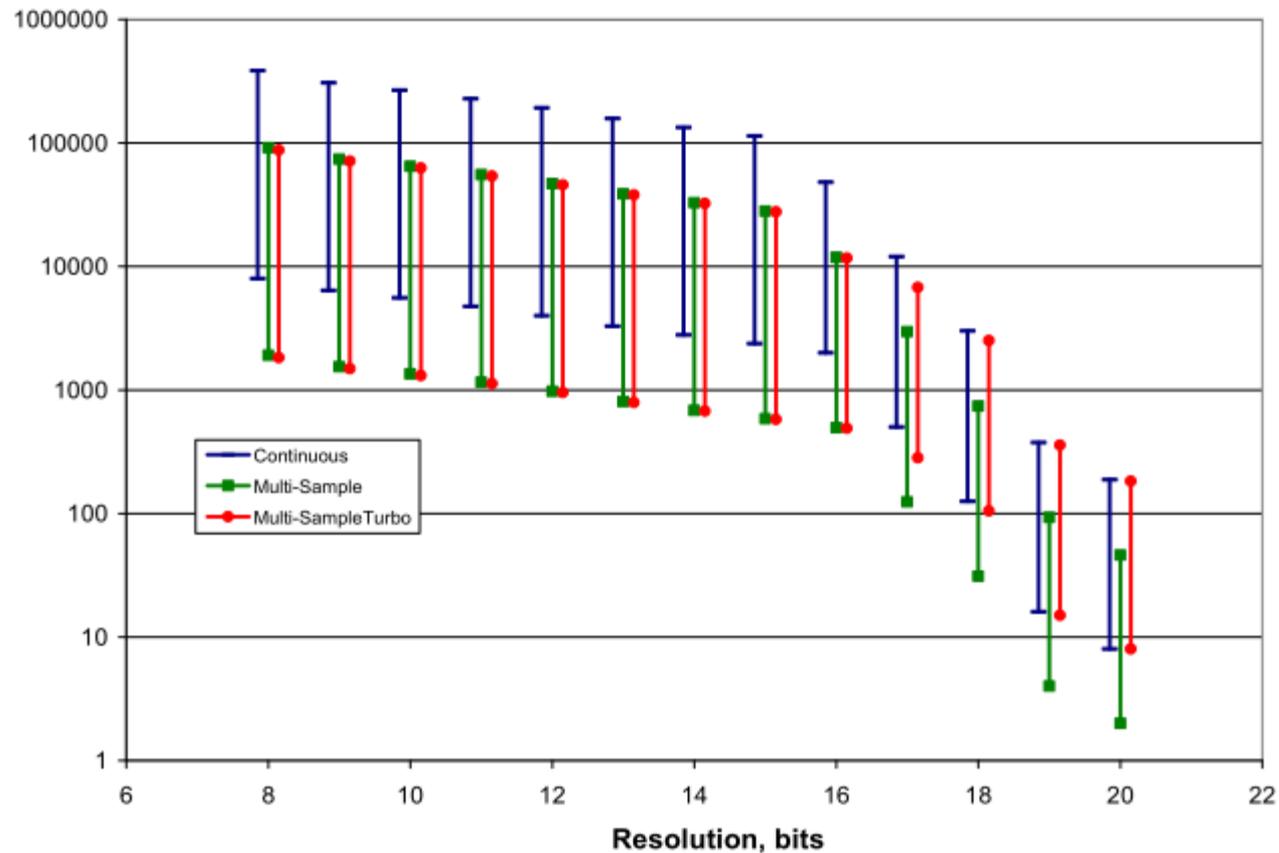
課題: この帯域のDFTをADC_DelSigと演算部で設計すると、どうなるかを考察し、アーキテクチャ提案してください。

$sps = \text{Sample/Sec}$

ADC_DeISig サンプリング周波数制約

分解能とサンプリング周波数のトレードオフ

Sample Rate Limits for ADC_DeISig



ADC_DeISig サンプリング速度制限

Sample Rate Limits for ADC_DeISig (Buffer Gain = 1)

Resolution	Single Sample		Multi-Sample		Continuous		Multi-Sample Turbo	
	Min	Max ¹	Min	Max	Min	Max	Min	Max
8	1911	91701	1911	91701	8000	384000	1829	87771
9	1543	74024	1543	74042	6400	307200	1489	71441
10	1348	64673	1348	64673	5566	267130	1307	62693
11	1154	55351	1154	55351	4741	227555	1123	53894
12	978	46900	978	46900	4000	192000	956	45850
13	806	38641	806	38641	3283	157538	791	37925
14	685	32855	685	32855	2783	133565	674	32336
15	585	28054	585	28054	2371	113777	577	27675
16	495	11861	495	11861	2000	48000	489	11725
17	124	2965	124	2965	500	12000	282	6766
18	31	741	31	741	125	3000	105	2513
19	4	93	4	93	16	375	15	357
20	2	46	2	46	8	187	8	183

DFTのまとめ

サンプリング周波数を決定、この1/2が、DFTの最大周波数。
サンプリング周波数 \times ポイント数で、DFT周期がきまります。
DFT周期とは、周波数分解能であり、またDFTの最小周波数。
演算結果の D_1 (複素数)が基底周波数成分(周波数分解能),
 D_2 が(2x基底周波数)成分, D_3 が(3x基底周波数)成分...これらから、周波数スペクトルの振幅を計算します

IDFT(逆離散フーリエ変換)を行なうと元の時間軸信号に変換できます。

時間軸のアナログ連続量をサンプリングしてデジタル・データ化してさまざまな演算処理するのが、デジタル信号処理です。

離散フーリエ変換は、その基礎となります。DFTにおける行列演算を高速に実行する場合には、FFT(高速フーリエ変換)というアルゴリズムを使います。これは計算量を劇的に削減します。

離散フーリエ変換の展開

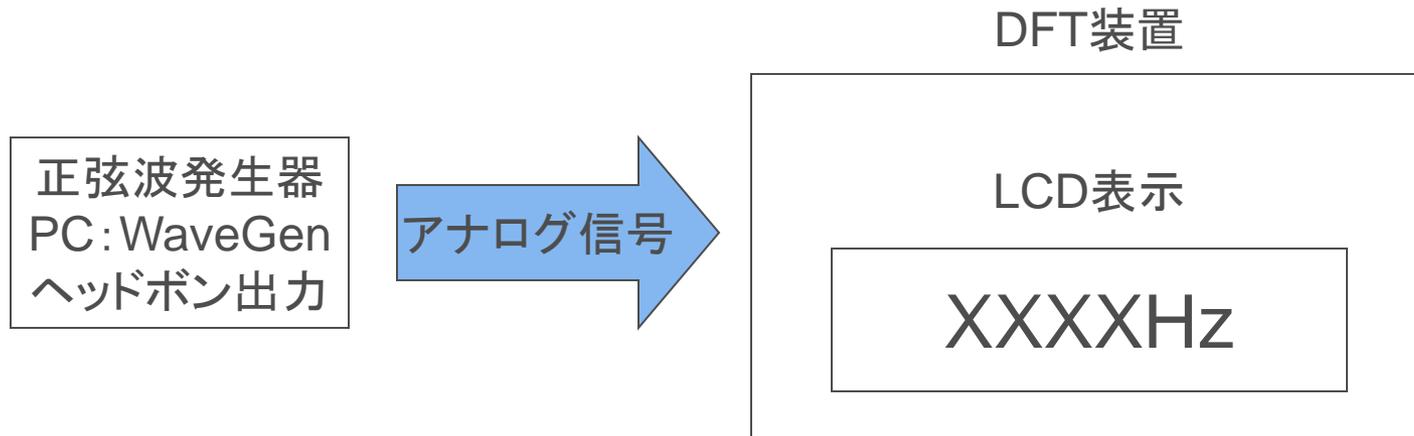
これまでは、音声や光などの波を想定した、一次のフーリエ変換を扱ってきましたが、この積分変換はN次で成り立ちますから、2次元化すると、画像データなどの解析に使えます。

離散コサイン変換(DCT)

各自で調べてレポートにまとめる

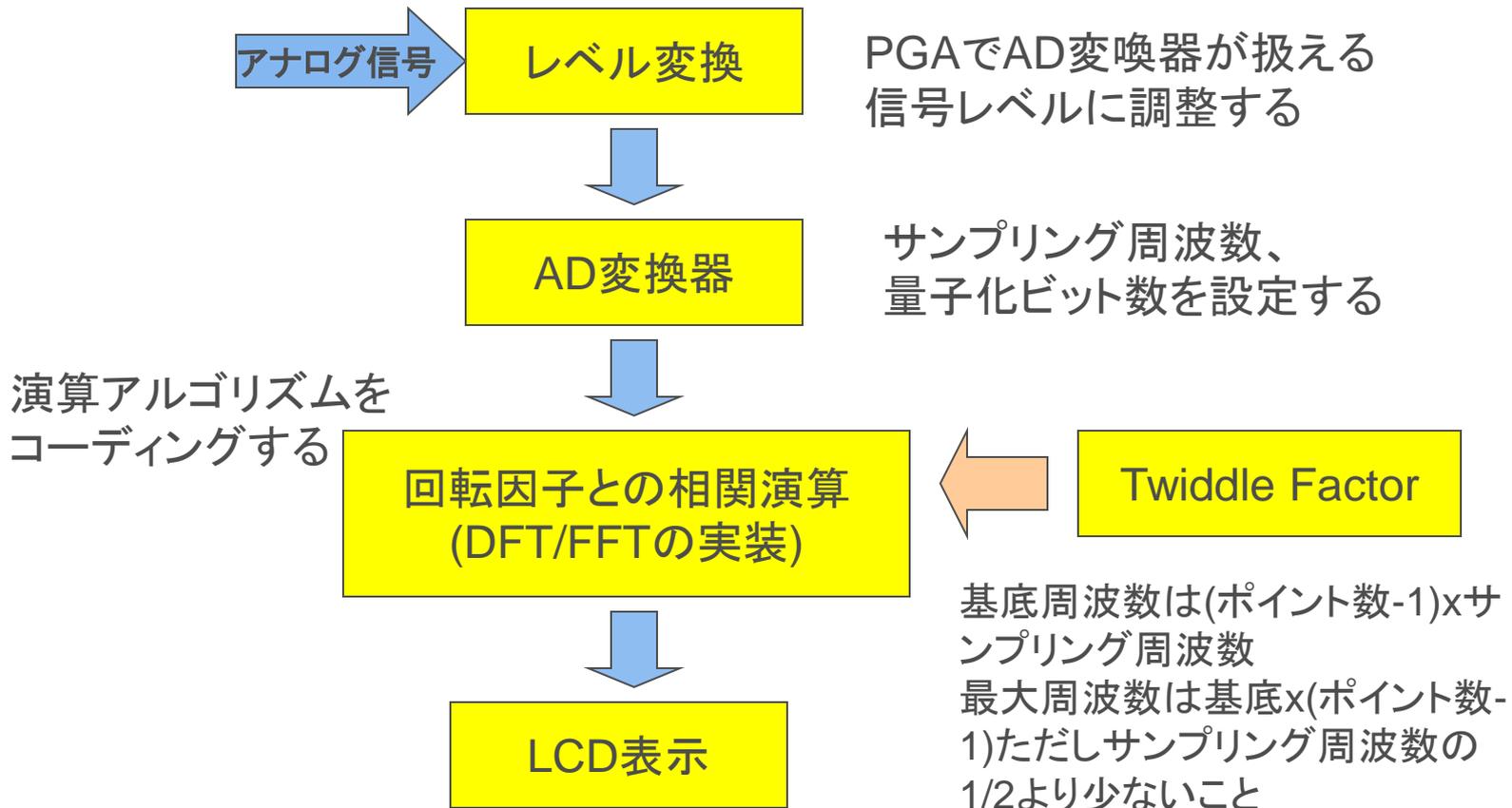
実装課題例：DFT装置

PCからの音響信号に含まれる基底信号
周波数をLCDに表示する装置を考案する

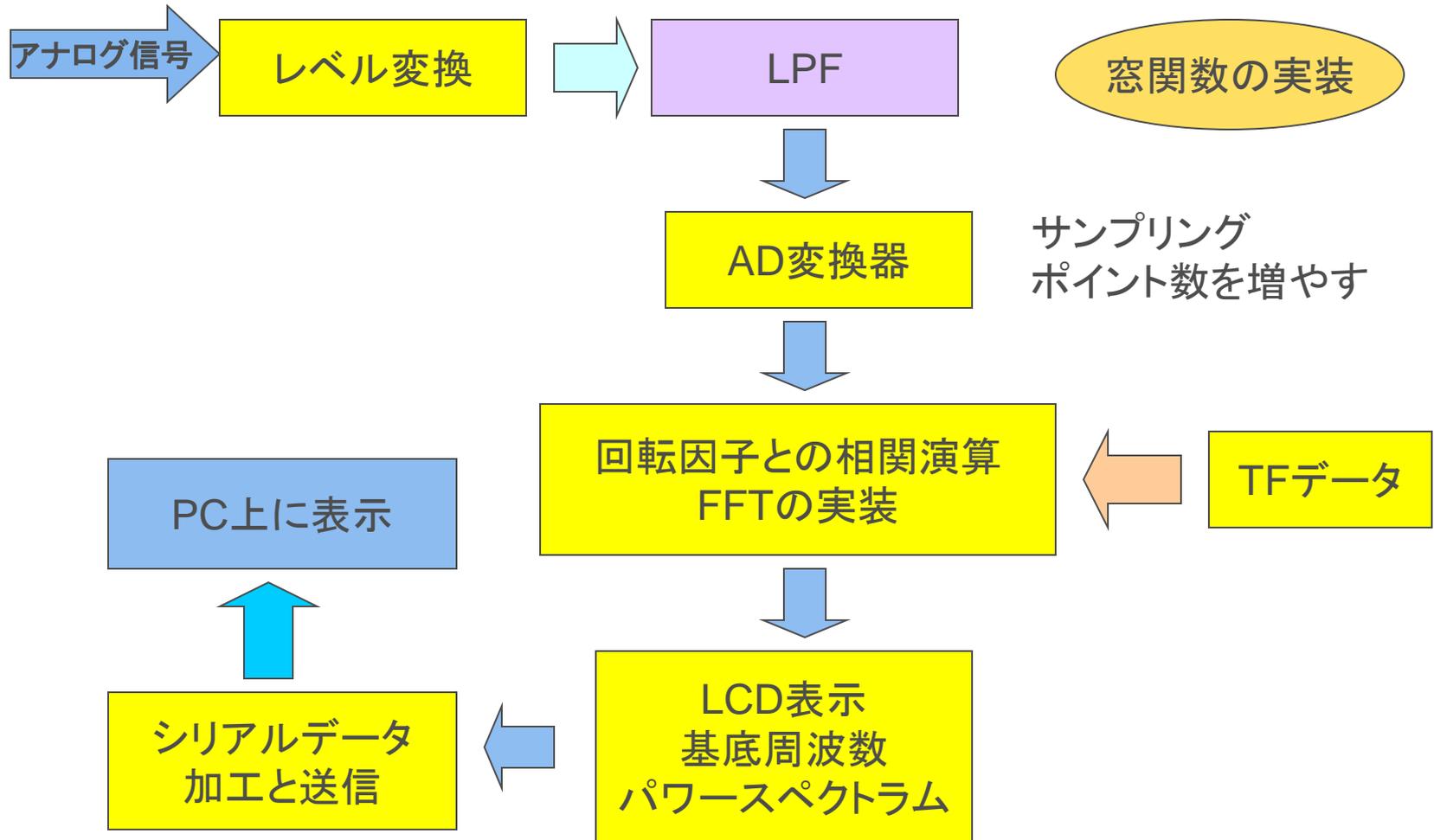


事前にサイン波発生装置を実装し、このサイン波をDFTしてその周波数をLCDに表示する装置を製作してみる、振幅を基底周波数の整数倍のバーグラフで表示する。

DFT装置の基本アーキテクチャ



拡張のアイデア



レベル変換と数値の扱い

DAコンバータで扱う数値の扱い、正の電圧、負の電圧、2の補数による正負の数の表現、PSoC1では正の電圧のみなので正の値で処理。

PCのヘッドフォン出力は、グランドレベルに対して

正負に変化します。特定個体(S社ノートPC)で実測したところ

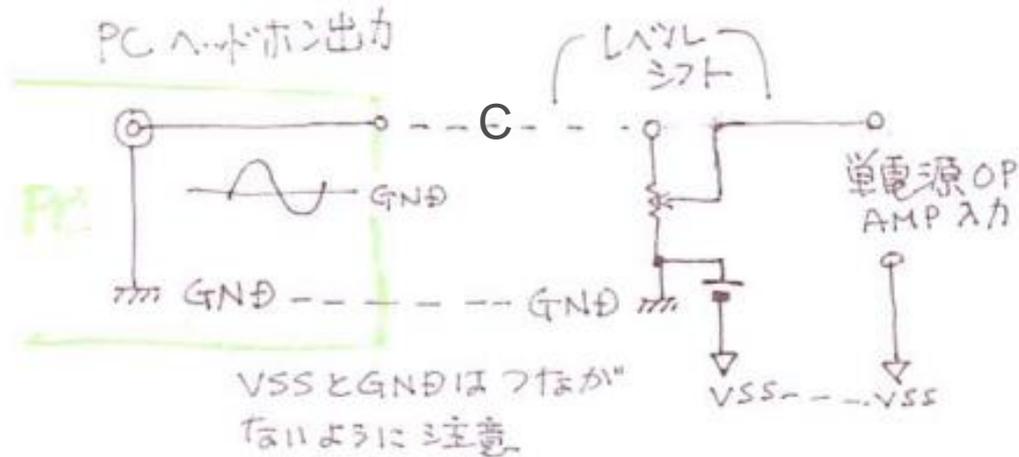
WGのレベルは、0dB設定時PCのVR設定50%で実測値が PP(PP:

Peak to Peak)で約275mV, 75%時約1.06V, 100%時約3.72Vでした。

75%付近のVRポジションでPP1Vを得て、基板上で500mVのレベルシフトをして約0 – 1Vの振幅を作成してください。この信号をADCに入力します。

PCのヘッドフォン出力をPCのマイク入力に入れる場合は、 -20dB 程度のアッテネーションをします。そうするとWSで信号観測できます。PCのマイクのL/Rチャンネルには、コンデンサマイクを使用するための2V程度のDCが出ていますので、念のため電圧を測って、Cでカプリングしておいてください。

正へのレベル変換

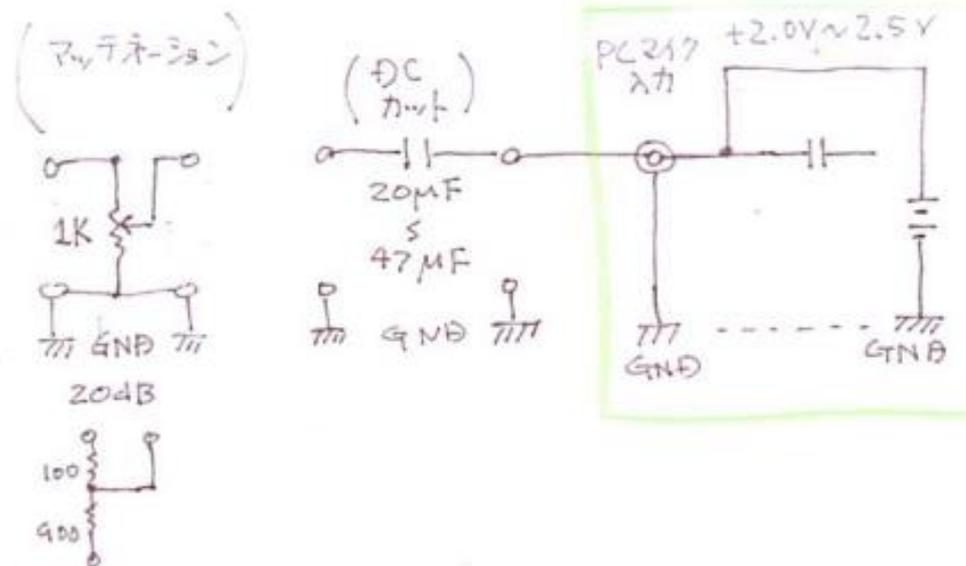


板書

PCのヘッドホン出力は、グラウンドレベルに対して正負に変化します。特定個体(S社ノートPC)で実測したところWGのレベルは、0dB設定時PCのVR設定50%で実測値がPP(PP: Peak to Peak)で約275mV, 75%時約1.06V, 100%時約3.72Vでした。

75%付近のVRポジションでPP1Vを得て、基板上で500mVのレベルシフトをして約0 - 1Vの振幅を作成してください。この信号をADCに入力します。

レベル変換とDCカット



PCのヘッドフォン出力をPCのマイク入力に入れる場合は、 -20dB 程度のアッテネーションをします。そうするとWSで信号観測できます。PCのマイクのL/Rチャンネルには、コンデンサマイクを使用するための 2V 程度のDCが出ていますので、念のため電圧を測って、Cでカップリングしておいてください。

離散フーリエ変換のコンテンツ

ディラックのデルタ関数

物理的にはインパルス信号

サンプリング定理とナイキスト周波数

サンプリングと量子化歪(雑音)

非周期信号の周期関数化 – 窓関数

FFT演算アルゴリズム

離散フーリエ変換と実装回路の対応

連続量から離散量を得る回路

AD変換 - $\Delta\Sigma$ 変調、 $\Delta\Sigma$ ADC ハードウェアの微分、
積分回路

サンプルアンドホールド回路

サンプリングは数学的には、デルタ関数の掛け算
高周波雑音を取り除くローパス・フィルタ

デジタルフィルタ – 物理的にはインパルス応答
サンプリング定理とナイキスト周波数

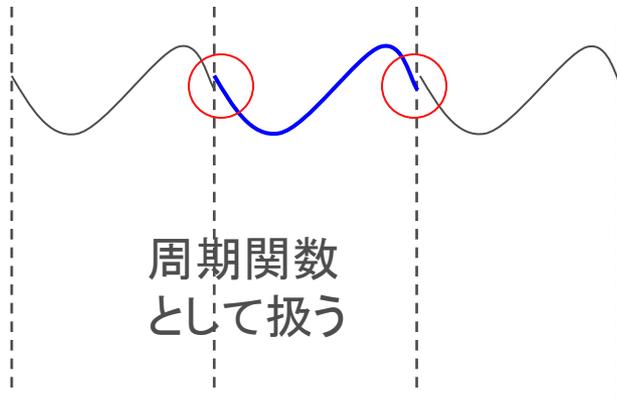
折り返しをカットするローパス・フィルタ

非周期信号の連続周期化 – 窓関数を掛けて区間を周期
関数化、 $t = nT_0$ におけるギブス現象

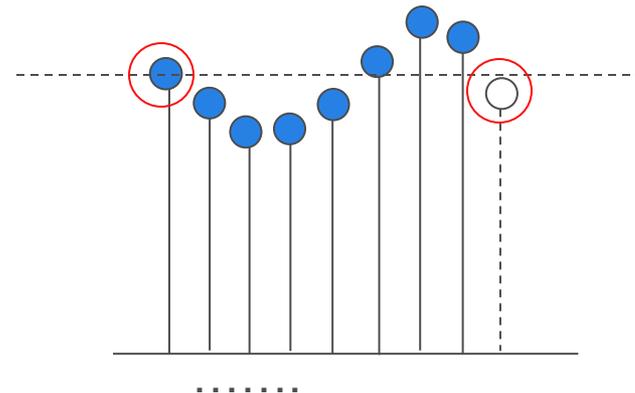
窓関数

$t = nT_0$ におけるギブス現象

窓関数を掛けて区間を周期関数化、矩形窓、ハニング窓、
ハミング窓、ブラックマン窓、ガウス窓、カイザー窓、
バートレット窓などの関数をかけて連続するようにしま
す



つなぎ目が合いません



Memo

フォローアップURL

<http://mikami.a.la9.jp/meiji/MEIJI.htm>

担当講師

三上廉司(みかみれんじ)

Renji_Mikami(at_mark)nifty.com

mikami(at_mark)meiji.ac.jp

http://mikami.a.la9.jp/_edu.htm

