Computer Science A
Hardware Design Excise Text 3
Fourier Series to
Fourier Transform May 9th.,2019

CSAHW Computer Science A, Meiji University

CSA_B3_Text_3.pptx 44 Slides

Renji Mikami

講義編3:フーリエ級数の導出

1.変数について:

フーリエ変換は、変数のとり方で解の形もさまざまです。ここでは、三角関数の基本周期2πから、$\omega = 1$、変数をxとしています。ωtで解く場合は、$x = \omega t,\ \omega = 2\pi f,\ f = \frac{1}{T}$として、必要な形で計算してください。($\omega$:角周波数、$f$:周波数、T:周期)

2.導出(この講座での攻め方)と展開:

フーリエ級数展開からフーリエ変換までは、x (弧度法で、角度を円弧の長さで示した値)を変数として解いていきますが、離散フーリエ変換(周期関数)では、フーリエ変換(非周期関数)から導出せず、離散量と複素正弦関数の離散値の相関を求める(行列演算をする)という方法をとります。この式の形(離散値行列積)を複素フーリエ級数式(周期関数、線スペクトル)から理解します。このとき、x(長さ)の関数をt(時間)に変換して、DFTの式を記述し、その高速演算としてFFTへ展開します。

情報科学を意識して、周期関数を主体に展開していきます。数学で行き詰っても離散フーリエ変換で立て直しができ、FFTに展開できます。

フーリエ級数からFFTまで

フーリエ級数(展開): ある関数をフーリエ級数(***実数***域)で表すこと
フーリエ級数化の条件: ***周期***的関数であること
収束条件:区分的になめらか、連続であること

周期 ***実数(数列)***

複素フーリエ級数(展開):フーリエ級数を複素数に拡張したもの
線スペクトルが得られる

周期 複素数

フーリエ変換: ***非周期***的関数対応に拡張したもの
関数化(連続量) 可積分な時間関数を変換可能

非周期 複素数

離散フーリエ変換(DFT - Discrete Fourier Transform)
フーリエ変換を離散量に対応させた変換
(注: ***周期***関数を前提にします)

周期 複素数

高速フーリエ変換(FFT - Fast Fourier Transform)
離散フーリエ変換の計算を高速実行するアルゴリズム

周期 複素数

演習では、主に青の矢印(周期関数)の道順で進めます。

フーリエ級数

フーリエ級数展開:

ある関数をフーリエ級数で表すこと

級数を求めることは、係数を求めることになります

係数とは、各周波数の振幅を意味します

これらは、線スペクトルです

フーリエ級数化と導出には条件があります

周期関数である点に注意してください

フーリエ級数展開の理解に必要な数学的基礎の確認

正規直交関数列について:

1.関数は、無限次元ベクトルであることを思いだす(テキスト2)
2.関数と関数の内積は、無限次元ベクトルの内積
3.内積は、関数と関数をかけて積分する。結果は、スカラ量
4.関数、ベクトルが直交するということは、内積がゼロ、積分値がゼロ、相関がない-ゼロ、一次独立であるということ、
5.直交関数列は、その集合に属する任意の二つの関数をとりだしたとき、その内積がゼロ。集合の元の関数群がすべて相互に直交している
6.正規化とはノルム(自己内積)が1であること。

周期関数:最も小さな周期:T_0を基本周期とし、以下であらわされるもの

$$f_{(t)}=f_{(t+nT_0)}\ ,n=1,2\ldots \text{正整数}$$

ここでは、$\sin, \cos$ 三角関数を使うので基本周期を2πとして扱う

ポイント:級数展開できる関数は周期関数であること、積分のためには、級数が収束すること、 $\sin$ (奇関数)と $\cos$ (偶関数)を使って内積をとる。これらをオイラーの公式でひとつにまとめて複素領域に拡張したものが複素級数展開

フーリエ級数式

$$f(x) = a_0 \cos x$$
$$+a_1 \cos x + b_1 \sin x$$
$$+a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$
$$+a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x \ldots\ldots\ldots +a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

xは、最も低い周波数で基底(基本)波といいます。
他の項には、すべて基底波の整数倍の波が現れ、
これらを高調波といいます。

a_0を$\frac{1}{2}a_0$と置き直してまとめ(1)式を得ます。

どうしてa₀の係数
を1/2にするの？

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ldots\ldots\ldots (1)$$

$\frac{1}{2}a_0$は、定数項(直流成分)、$\frac{1}{2}$はノルムが倍のため、係数合わせ
$f(x)$は、級数のため非連続値です。

フーリエ級数式を読み解く

演習 3.1.1 フーリエ級数式を読み解いてください。
この式は、何を意味しているのでしょうか？
また疑問点を挙げてください。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x) \ldots\ldots. (1)$$

フーリエ係数 a_0を求める

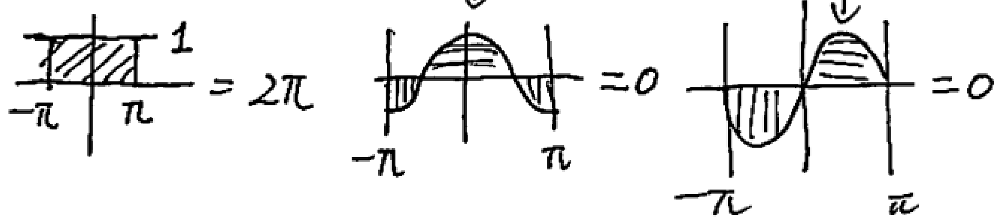
係数a_0を求めてみよう

各 a_0 の係数は

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \cdots\cdots (1)$$

両辺を $\int_{-\pi}^{\pi}$ の一周期分積分して

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx + \sum_{n=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx\right)$$



$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0 \cdot \pi$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

一周期積分してゼロにする

フーリエ係数 a_n

係数a_nを求めてみよう

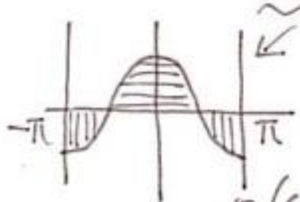
a_nを求めると

b_nの項をゼロにするために $\cos mx$をかけて積分します

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ \text{---}(1)$$ より

両辺に $\cos mx$ をかけて $\int_{-\pi}^{\pi}$ の一周期分積分して (mは自然数)

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nx\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nx\cos mx\,dx$$



$= 0$

書き直して

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nx\cos mx\,dx}_{Ⓐ}+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nx\cos mx\,dx}_{Ⓑ}\right)\ \text{---}(2)$$

ここで $\cos nx+j\sin nx=e^{jnx}$, $\cos nx-j\sin nx=e^{-jnx}$ から

$$\cos nx=\frac{e^{jnx}+e^{-jnx}}{2},\quad \cos mx=\frac{e^{jmx}+e^{-jmx}}{2}$$

Ⓐに代入して
次スライドに続く

Ⓑは $\boxed{\text{フーリエ級数と}}$ $\boxed{\text{正規直交系関数2}}$ のスライド参照。奇関数のためゼロ

設問“形式的に”計算を進めているところを指摘できますか？(テキスト2参照)

フーリエ係数 a_n 続き

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \frac{(e^{jnx}+e^{-jnx})}{2}\cdot\frac{(e^{jmx}+e^{-jmx})}{2}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \frac{e^{jnx}\cdot e^{jmx}+e^{jnx}e^{-jmx}+e^{-jnx}\cdot e^{jmx}+e^{-jnx}e^{-jmx}}{4}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{j(n+m)x}+e^{j(n-m)x}+e^{-j(n-m)x}+e^{-j(n+m)x})}{2}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+m)x+\cos(n-m)x)\,dx$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\left[\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x + x\right]_{-\pi}^{\pi} & n=m \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\left[\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x + \frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\right]_{-\pi}^{\pi} & n\neq m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_n\pi & (n=m) \\ 0 & (n\neq m) \end{cases}$$

この式の意味を
読み解くことが
重要

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}$$

演習3.2.1同様にフーリエ係数
b_n を求めてください

演習3.2：フーリエ係数 b_n

演習3.2.1 同様にフーリエ係数b_n を求めてください

各自でまとめる

この式の意味を読み解くことが重要

フーリエ係数の導出と級数化の条件

導出は式(正規直交系,整数倍角の級数)中の係数を求めることに帰結します。関数が区間$[-\pi,\pi]$で収束すれば、項別積分できます。
係数を求めるには、$\sin(x)$ と$\cos(x)$をそれぞれに掛けて1区間定積分します。
関数の直交性を利用して他の項を消去していきます。(1) 式から係数を求めると以下の係数式が得られます。
三角関数の係数式は、実数がすぐに求まりますから、数値を直接扱う現場などでよく使用されます。

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\,x+b_n\sin n\,x)\ldots\ldots.(1)$$

$f(x)$が区間$[-\pi,\pi]$で積分でき、(1)式が項別積分可能であれば、その係数a_k,b_kは、(3)式および(4)式で与えられます。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx\ldots\ldots(4)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx\ldots\ldots(5)$$

一周期 $[-\pi,\pi]$ で積分

係数が、もとの関数と$\sin(x)$ と$\cos(x)$の相関の計算になっていることに着目してください。
これが本質です。

T26,J113

複素フーリエ級数展開

実数領域の三角関数によるフーリエ級数式を複素数へと拡張します。オイラーの公式を使ってcos とsinの項をネイピア数と複素数でひとまとめにします。
共役複素数と対称和に注意してください。

オイラーの公式を使って、cos とsin をひとまとめにします。
e^{jx}が現れますが、j は虚数です。実数から複素数に拡張されます。
複素関数論を履修していない方のために

複素数には、数の大小はありません。
複素数は、正則性があります。微分可能であれば何度でも微分できます。
微積分しても形の変わらないe (ネイピア数)を使います。
j をかけると複素(ガウス)平面上をぐるぐる回ります。
複素数zの共役複素数$\bar{z}$の存在に着目してください。

複素フーリエ級数展開

cosとsinの整数倍角の直交関数列のパック詰めだよ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x)$$ 式は

複素形式に書き直して整理

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(e^{jnx} + e^{-jnx}) - jb_n(e^{jnx} - e^{-jnx}))$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((a_n - jb_n)e^{jnx} + (a_n + jb_n)e^{-jnx}))$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((a_n - jb_n)e^{jnx})$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((a_n + jb_n)e^{-jnx})$$

範囲を$-\infty$に拡張し、2項と3項目の対称和をとり、

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}((a_n - jb_n)e^{jnx}))$$

さらに、$c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ と置きなおすと

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jnx} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$ (但し$c_{-n} = \bar{c}$

$$= \frac{1}{2}(a_n + jb_n))$$

代入

$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$ から

$$\cos n\,x = \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2}$$

$$\sin n\,x = \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j}$$

対称和になっています

この式は、複素係数の級数式を表しています。

T30,J116

複素フーリエ級数の係数

係数を求めると

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos k\,x dx \qquad (4), \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin k\,x dx \qquad (5)\text{より}$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos k\,x dx - j\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin k\,x dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\cos k\,x - j\sin k\,x)dx \qquad \text{ド・モアブルの定理から}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \boxed{f(x)}\, e^{-jkx} dx \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.) \ldots..(7)$$

前のスライドにあるように、複素フーリエ級数では、対象和をとっていることに注意してください。*四角い枠の部分に注目!　もとの関数$f(x)$に核関数としての複素正弦関数をかけて積分しています。**相関を表す係数が、複素数で求まります。*

T31,J117

対称和

三角関数は、指数関数で極座標表示されたベクトルe^{jx} とe^{-jx} の合成和で表現されます。(S　: Sum)

よって、$Sk_{(x)}$ = $(C_1\ e^{jx} + C_{-1}\ e^{-jx})$

$+(C_2\ e^{j2x} + C_{-2}\ e^{-j2x})$

$+(C_3\ e^{j3x} + C_{-3}\ e^{-j3x})$

…………+$(C_k\ e^{jkx} + C_{-k}\ e^{-jkx})$

=(4)式

と複素指数関数表現では、対称和をとります。この対象和のペアは、共役になっていますので、和をとると実数になって三角関数値と一致します。

三角関数と指数関数による表現は、ケースによって使いわけます

T32,J

三角関数と複素数によるフーリエ級数と係数(まとめ)

三角関数表現

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\, x + b_n \mathrm{sin} n x) \quad \ldots (1)'$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos k\, x dx \ldots (4)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin k\, x dx \ldots (5)$$

フーリエ級数は、無限級数のため、この収束、発散を考慮しないといけません。

そのためここでは、形式的に$f(x) \approx$として あります。

複素数表現

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jnx} \ldots (6)'$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} e^{-jkx} dx \ldots (7), \quad c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} e^{jkx} dx \quad \ldots (8)$$

$$(\text{但し} c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad , \quad c_{-k} = \overline{c} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k))$$

T32,J

離散フーリエ変換式との比較

Preview

(8)

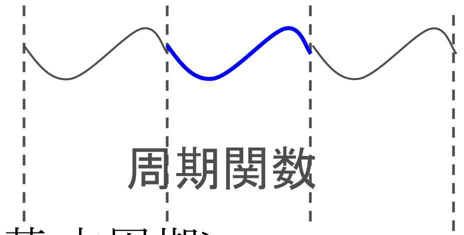
(7)式の複素フーリエ級数の係数は、

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jkx}dx \ldots (7),$$

e^{-jkx}を$e^{-j2\pi\frac{1}{T}kt}$　と置き変えてみると

$c_k \cdots\cdots \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T} f(t)e^{-j2\pi\frac{1}{T}kt}dt$ という形になります。(T : 基本周期)

複素フーリエ級数表現



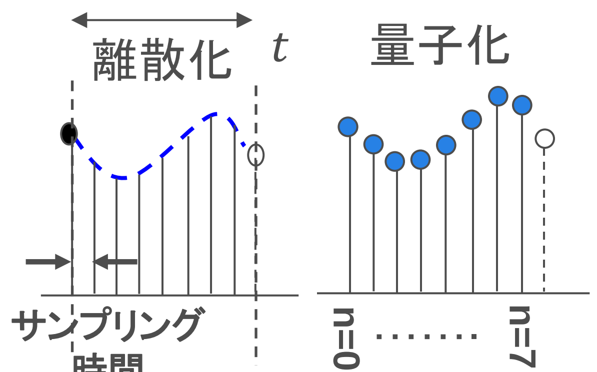
C_kは級数,線スペクトル

テキスト4の離散フーリエ変換式(18)は、

$$D_{(k)} = \frac{1}{M}\sum_{\mathrm{n}=0}^{M-1}(h_{(n)}e^{-j2\pi\frac{1}{M}kn}) \quad \ldots.(18)$$

離散フーリエ変換式

(8)式の1周期を$\frac{1}{M}$単位でサンプリングして、
積分の代わりに行列積を求めたものになります。



サンプリング数
M = 8の例

Mはサンプリング数,n は$h_{(n)}$のn番目の離散値,kは離散フーリエ変換$D_{(k)}$ の周波数項

e^{jkx} 複素正弦関数の離散値

この中身は、cosとsinの整数倍角の直交関数列のパック詰めだよ

e^{-jkx}　　この複素正弦関数は、(オイラーの公式より)三角関数のsin, cos成分を含んでいます。複素指数関数ともいいます。

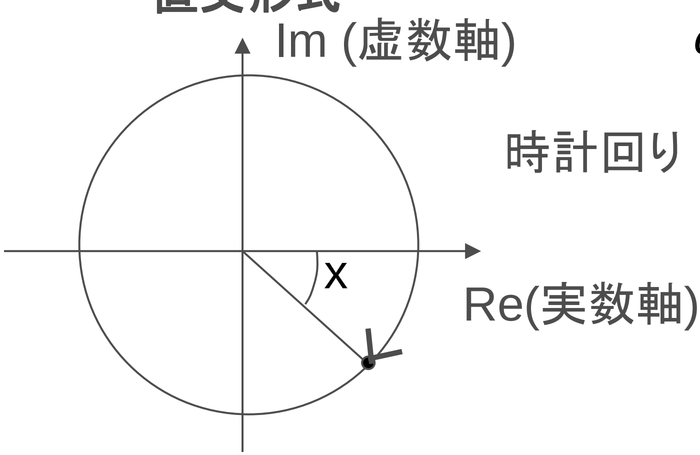
前のスライド解説の正規直交系を思い出してください。

係数を求めるために、$f_{(x)}$に複素指数関数を**かけて積分**することは、$f_{(x)}$ との相関を求める(ベクトルでは内積をとる)ことになります。この係数がその周波数における成分量になります。(もし値-相関がゼロであれば、両者は直交しているということになります。)

複素フーリエ級数式　　**離散フーリエ変換式**

$e^{-j2\pi\frac{1}{T}kt}$(数列)... > $e^{-j2\pi\frac{1}{\mathrm{M}}kn}$(離散値)

直交形式



離散フーリエ変換の場合は、この式の離散値はTwiddle Factor(ひねり因子)として、サンプリング・データ(もとの関数の離散値)との行列積(関数だとかけて積分)をとります。この関数は、ガウス平面の単位円上を時計回りにとびとびの値(1の冪根)をとって回転します。

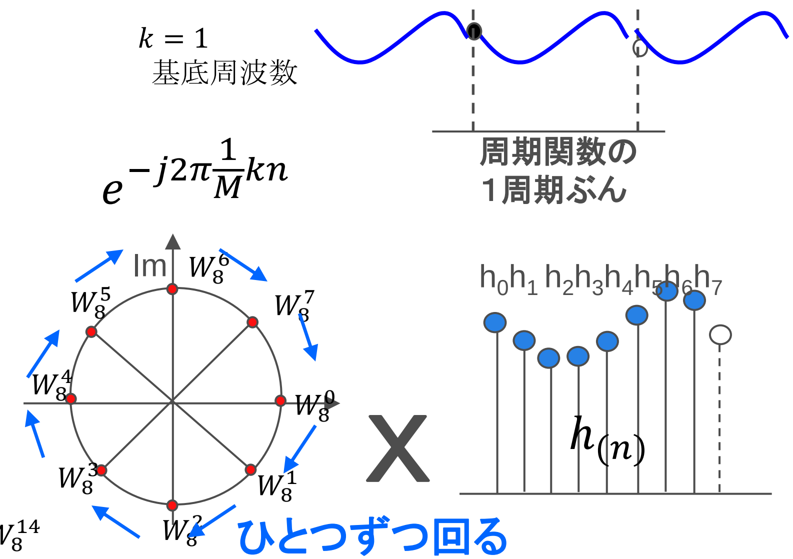
N倍基底周波数成分D_Nの計算$(k = N)$ Preview

TF:Twiddle Factor

D_1は、基底周波数の1倍$(k = 1)$の周波数成分になります。(三角関数では、$sinx, cosx$の項)複素正弦関数のTFでは、2乗は2倍、3乗は3倍、N乗はN倍の回転角を進みます。

$$D_1 = h_0 W_8^0 + h_1 W_8^1 + h_2 W_8^2 + h_3 W_8^3 + h_4 W_8^4 + h_5 W_8^5 + h_6 W_8^6 + h_7 W_8^7$$

行列演算

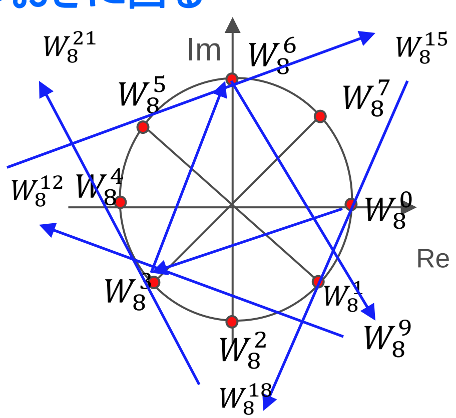


$$D_2 = h_0 W_8^0 + h_1 W_8^2 + h_2 W_8^4 + h_3 W_8^6 + h_4 W_8^8 + h_5 W_8^{10} + h_6 W_8^{12} + h_7 W_8^{14}$$

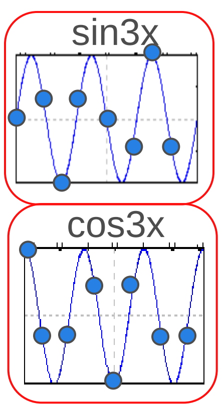
ひとつずつ回る

3倍基底周波数の場合

3つおきに回る



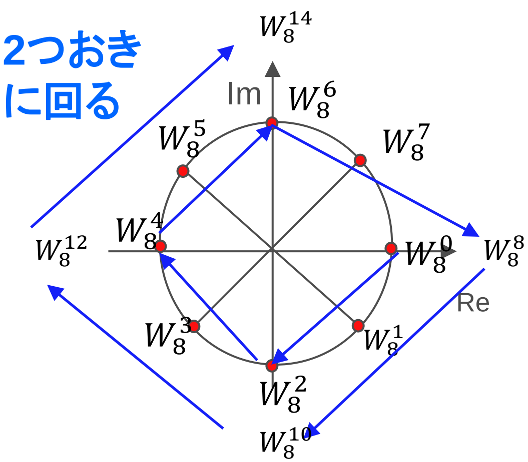
複素正弦関数



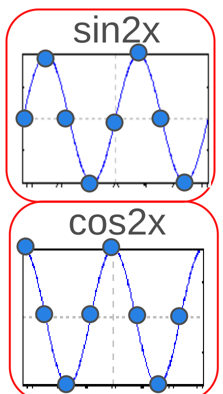
三角関数:実数

2倍基底周波数の場合

2つおきに回る



複素正弦関数



三角関数:実数

非周期関数への拡張

フーリエ変換

Fourier Transform

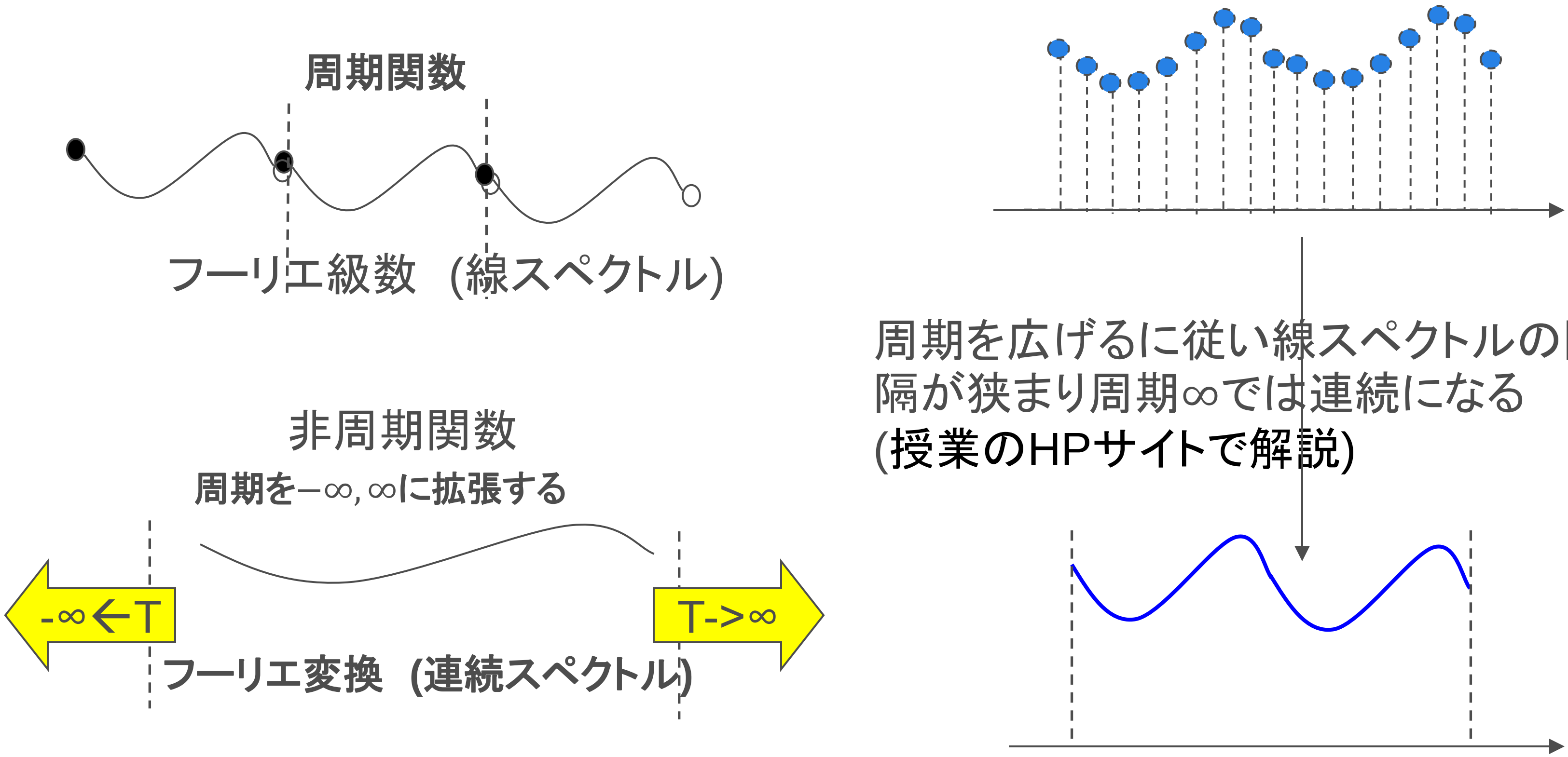
フーリエ級数は、周期関数をから級数(線スペクトル)を得ましたが、フーリエ変換では、もとの関数を非周期関数対応に拡張します。これには、変換対象の関数の周期を±無限大に拡張して(周期がないと考える)積分します。これにより級数の線スペクトル間隔が無限に狭まり、連続スペクトル=連続関数化します。

フーリエ変換のできる条件は、区間±∞で、関数が収束すること(可積分であること)になります。(収束しない関数を収束させる方法に、同じ積分変換のひとつであるラプラス変換が使われます。)

フーリエ級数やフーリエ変換は、数学的厳密さと導出のみに終始すると、本質的な意味を見落とすことがあります。フーリエのアイデアは非常に斬新ですが、任意の関数への適用は、数学的厳密性が要求され、完成まで多くの時間がかかりました。
本演習では、証明すみの定理は、そのまま使い、本質の理解と成果の応用に重点をおきます。
諸定理と数学的導出には興味深い内容をたくさん含みますので、各自で勉強を進めてください。

非周期関数への拡張

フーリエ級数の基本周期を$2T$とし、続いてこの周期を$\pm\infty$にとる。無限大周期関数を、非周期関数と解釈する



フーリエ級数の$2T$周期化

$\sin x$, $\cos x$ は、周期2π, $\sin\frac{\pi}{T}x$, $\cos\frac{\pi}{T}x$を考えると

$f(x) = \sin\frac{\pi}{T}x$とおいて、以下のように２$T$周期となります。

$$f(x+2T) = \sin\frac{\pi}{T}(x+2T) = \sin(\frac{\pi}{T}x + \frac{\pi}{T}2T) = \sin(\frac{\pi}{T}x + 2\pi)$$
$$= f(x)$$

$\cos\frac{\pi}{T}x$も同様$2T$周期となります。

$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x)\ldots(1)'$式は、周期$2T$では、

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\frac{\pi}{T}x + b_n \sin n\frac{\pi}{T}x)\ldots(9)$$

係数は、$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_T(x)\,dx\ldots(10)$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_T(x)\cos k\frac{\pi}{T}xdx\ldots(11)$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_T(x)\ \sin k\frac{\pi}{T}xdx\ldots(12)$$

$y = \sin \mathrm{n}\, x$において

nを$\frac{2\pi}{2T}n = \frac{\pi}{T}n$と

置きなおすと

周期$2T$になります

Y,T4361

周期$\pm T$ -> ± ∞ 化

$$\lim_{T\to\infty}|a_0| = \lim_{T\to\infty}\left|\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_{T(x)}dx\right| = 0$$

同様に以下の式の$T\to\infty$に極限をとります

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_{T(x)}\cos k\frac{\pi}{T}xdx \ldots(11)$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_{T(x)}\sin k\frac{\pi}{T}xdx \ldots(12)$$

導出演習は課題とします。

講義メモ

Y,T4361

複素数形式のフーリエ変換式

-得られた三角関数のフーリエ変換式をオイラーの公式を使って、
複素数形式のフーリエ変換式の形にしてください。
以下の複素フーリエ級数と対比してください。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnx} \ldots\ldots\ldots.(6)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)}\, e^{-jkx} dx \quad \ldots(7)$$

講義メモ

導出計算は、すぐにできなくてもいいです。むしろ本質的な考え方を理解することが大事です。この計算は、余裕のあるときに一度はやってみてください。
フーリエ級数では、線スペクトルであったものがフーリエ変換で周期を±∞に拡張することによって、線スペトルの間隔が狭まっていき、極限では連続スペクトルになります。

フーリエ変換と逆フーリエ変換

下式中の$G(f)$ から$g(t)$ への、この積分をフーリエ積分といい、$G(f)$ を$g(t)$ のフーリエ変換といいます。(f : 周波数、T : 周期、t:時間)

右辺を見ると、時間関数$g(t)$ に複素正弦関数をかけて積分しています。

この複素指数関数は、前のスライドのように三角関数のsinとcosの成分を示しています。関数をかけて積分することは、内積をとることです。つまり$g(t)$ の中に sinとcosの成分がどれだけ含まれているかを計算しているわけです。

フーリエ変換とは、関数$g(t)$ と$e^{-j2\pi ft}$ との相関の計算とも言えます。

このような、積分変換には、ラプラス変換やz変換などがあります。

$$G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt \ldots(8) \quad f=\frac{1}{T}\text{とすると}G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi\frac{1}{T}t}dt \ldots(8)'$$

また逆フーリエ変換は

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \ldots(9) \quad f=\frac{1}{T}\text{とすると}g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi\frac{1}{T}t}df \ldots(9)'$$

(8)式と(9)式をフーリエ変換対といいます。

F37,T63、70,J122

角周波数で解くと

$\omega = 2\pi f$より(8)式は、

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j\omega t} df \quad = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(f)}{2\pi} e^{j\omega t} d\omega \ldots (13)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} G(f) \ldots (14)$$とおいて

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \quad \ldots (15)$$ 逆フーリエ変換式

よって$G(\omega)$は(8), (14)式より

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi t} dt \quad \ldots (16)$$

$$2\pi G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j\omega t} dt \ldots (17)$$ フーリエ変換式

F37

フーリエ変換式のいろいろ

フーリエ変換式の導出は、これまで述べた手順で行いますが、ノルムのとり方や変数の使い方（ωが周波数の場合と角周波数の場合など）で計算式に違いがあります。その結果、さまざまな形の式が教科書や解説書に登場します。それらは本質的に同じものですが、勉強を進める上で、混乱が生じかねません。次のスライドに、各方面での代表的な式を紹介します。変数の使い方でも応用分野で大きな違いがあります。導出演習の参考にしてください。

フーリエ変換と収束

フーリエ変換が可能な関数の条件は、$\pm\infty$の区間で、$\int f(t)dt$ が収束することとなります(可積分であるということ)。収束しない関数の場合は、ラプラス変換で収束させます。$e^{-\mathrm{st}}$をかけるラプラス変換はフーリエ変換と同じ関数の形(積分変換)をしています。その意味ではお互いが相互の特殊な形と考えることもできますが、その働き(目的)は大きく異なります。

フーリエ変換対-各表現式の比較(ωt)

標準・現代物理

フーリエ変換式

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt$$

逆フーリエ変換式

$$f(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} dt$$

信号処理

フーリエ変換式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\varpi t} dt$$

逆フーリエ変換式

$$f(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

古典物理学

フーリエ変換式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dv$$

逆フーリエ変換式

$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} du$$

純粋数学・システム工学

フーリエ変換式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

逆フーリエ変換式

$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

資料：Mathematica:T70 http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/IntegralTransformsAndRelatedOperations.ja.html

フーリエ変換対-各表現式の比較(uv)

標準・現代物理

フーリエ変換式

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-juv} dv$$

逆フーリエ変換式

$$f(v) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{juv} du$$

信号処理

フーリエ変換式

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-j2\pi uv} dv$$

逆フーリエ変換式

$$f(v) \approx \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi uv} du$$

古典物理学

フーリエ変換式

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-juv} dv$$

逆フーリエ変換式

$$f(v) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{juv} du$$

純粋数学・システム工学

フーリエ変換式

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-juv} dv$$

逆フーリエ変換式

$$f(v) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{juv} du$$

資料:Mathematica:T70 http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/IntegralTransformsAndRelatedOperations.ja.html

フーリエ級数とフーリエ変換の性質(追補)

関数 $f(t), g(t)$のフーリエ変換を$F(j\omega), G(j\omega)$とし、関数$H(t)$のフーリエ変換を$H(j\omega)$とすると以下の関係が成り立つ

1. 重ね合わせ
2. 反転
3. 推移
4. 比例
5. 変調
6. 微分
7. 積分
8. 合成
9. 積(畳み込み積分)

G160

関数の”波形(時間軸)”とスペクトル(周波数軸)

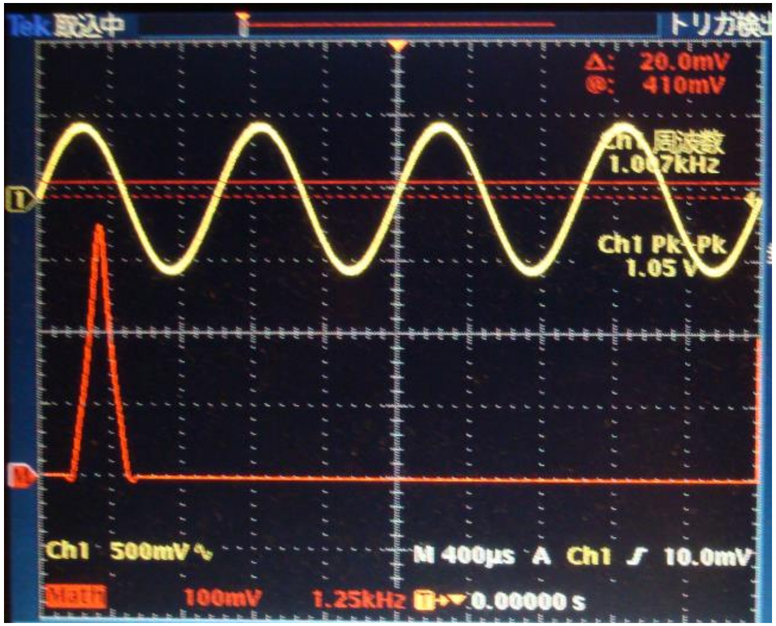
ここでサイン波とそのフーリエ級数を思い出してみてください。また矩形波とそのフーリエ級数も思い出してみてください。どんな線スペクトルだったでしょうか？絵に描いてみましょう。

なだらかな関数、ゆるやかな変化の波形は、スペクトルの数が少なく、急峻に変化する関数や波形ではスペクトルは多くなります。(スペクトルの数とは周波数の成分の数です。)

次項のサイン波、三角波、矩形波、のこぎり波の”波形のとんがり度”とスペクトルの関係を観察してください。

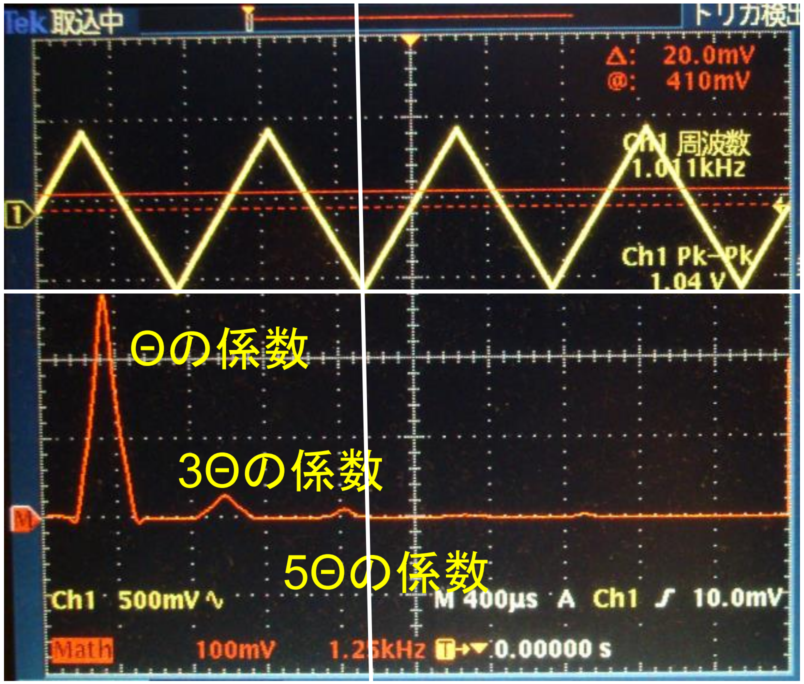
最も急峻(非なだらか)なものに、ディラックのデルタ関数(超関数)などがあります。離散フーリエ変換では、もとの連続関数に、この関数をかけて積分し、離散値を得ます。この数学的な意味は、回路に実装するとサンプリング回路になります。さらに振幅方向も量子化を行うとAD変換になります。これは、時間軸と振幅軸双方で離散化と量子化が行なわれていることを示します。

正弦波とスペクトル



オシロスコープ波形とスペクトル（振幅はRMS）

三角波とスペクトル

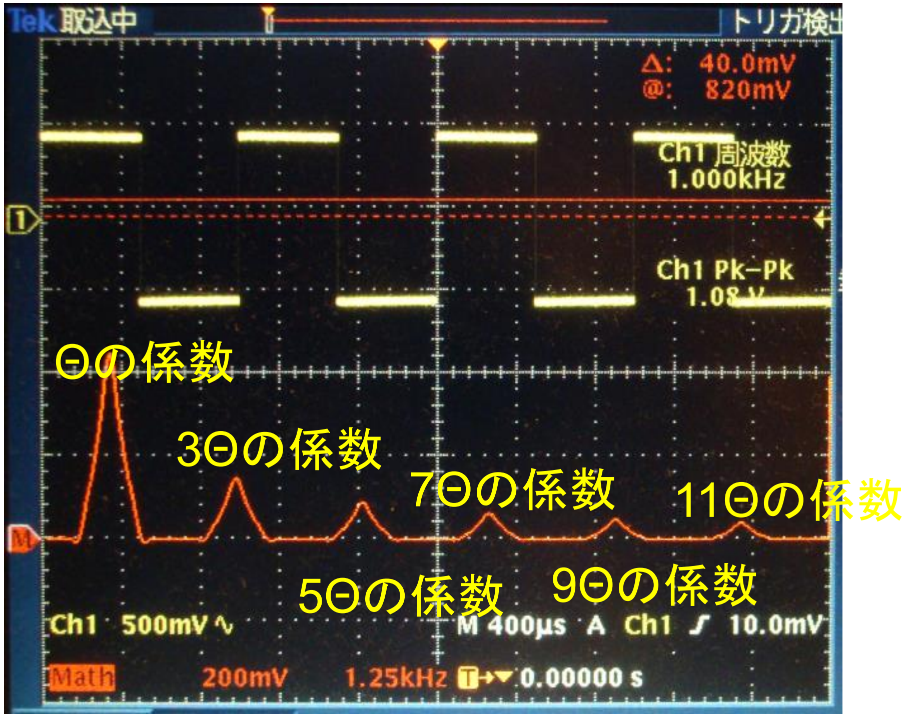


オシロスコープ波形と
スペクトル（振幅はRMS）

$$f(x) = \begin{cases} -x & (-\pi \leq x < 0), \\ x & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

級数式 $$f(x) \approx \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -2\frac{1+(-1)^{n-1}}{n^2\pi}\cos nx$$

矩形波とスペクトル

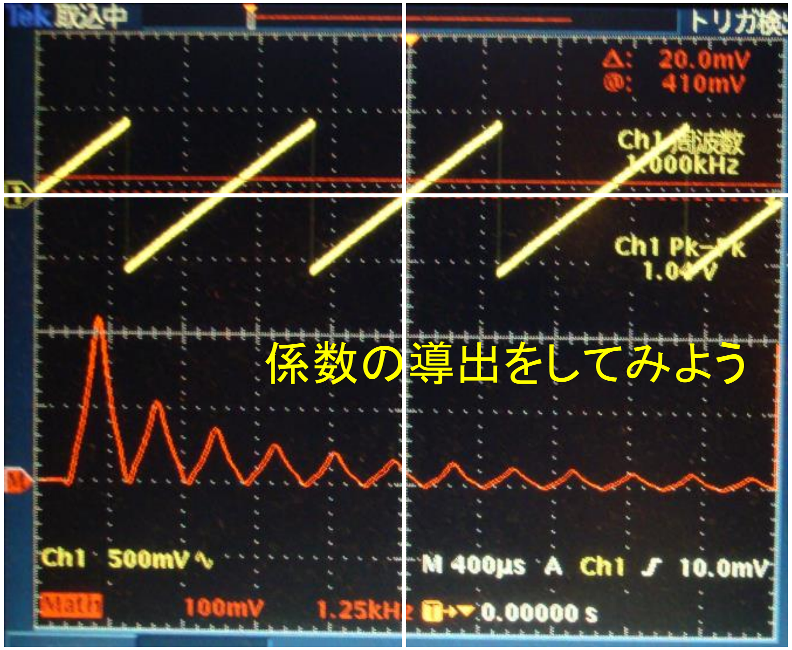


オシロスコープ波形とスペクトル（振幅はRMS）

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \le x < 0), \\ 1 & (0 \le x < 1) \end{cases}$$

級数式 $$f(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi x$$

のこぎり波とスペクトル1

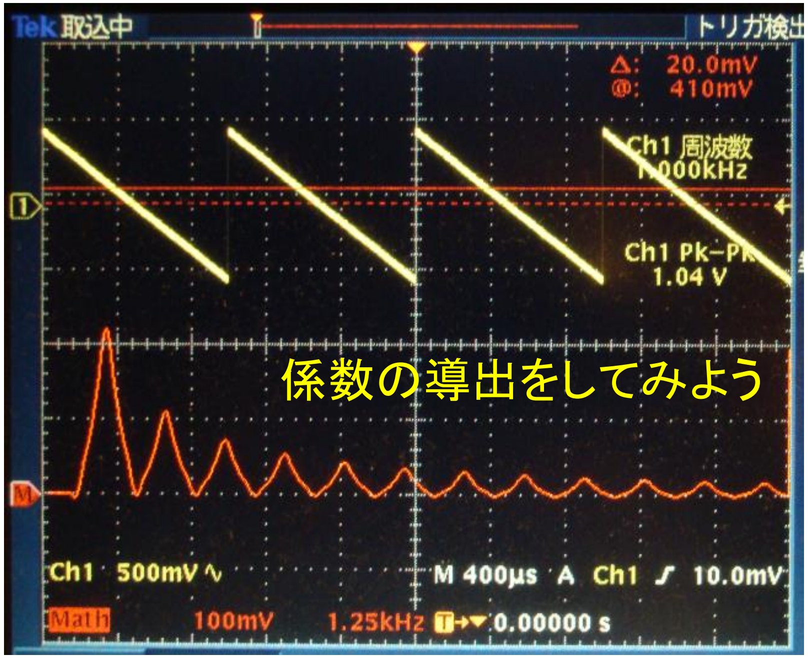


$$f(x) = x \qquad (-\pi \leq x < \pi)$$

オシロスコープ波形とスペクトル（振幅はRMS）

級数式 $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\,x$

のこぎり波とスペクトル2



オシロスコープ波形とスペクトル（振幅はRMS）

$$f(x) = -x \qquad (-\pi \le x < \pi)$$

フーリエ変換からの展開

数学や物理学に興味のある方は、フーリエ変換からさらに量子力学に向かって勉強を進められるとよいと思います。フーリエ変換の本質を理解していることが大きな強みになると思います。

電子電気分野に興味のある方は、ラプラス変換とフーリエ変換を対比させて考えてみると大きく世界が開けてきます。思わぬ近道が見つかったりします。これらの方面に進む場合は、フーリエ変換の性質など、数学的な勉強を進めてください。

情報科学分野の方や現代のデジタル信号処理などに進まれる方は、周期関数の離散量を対象としますので、離散フーリエ変換がこの方面の入り口になってきます。テキスト4では、離散量を対象に展開していきます。

離散フーリエ変換は、実際には連続した信号を細かい区間に区切って、その区間が永続的に反復する周期関数と考えて変換を行います。その単位の変換を次から次へと流れ作業のように処理して連続変化量をデジタル処理系が扱えるようにします。その意味では、変換の単位ごとでは、周期関数として扱いますので複素フーリエ級数展開に似ています。

しかし、無理矢理周期関数化すると、波形のはじめと終わりのつなぎ目が合わず、ギブス現象が発生しますので、窓関数をかけるという作業を行います。これによりもとの信号は"ゆがみ"ます。また、離散化のためには、標本化(サンプリング)が行われますので、ノイズの処理も考えないといけません

信号(関数)の離散化により、時間変化量を情報処理のプロセスに載せることができ、。今日のデジタル時代を基幹技術として支えています。

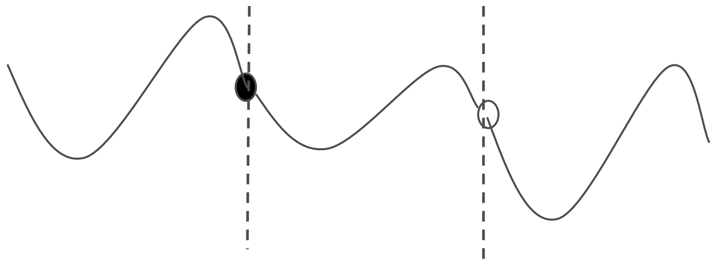
離散的フーリエ変換

フーリエ変換から
離散的フーリエ変換へ

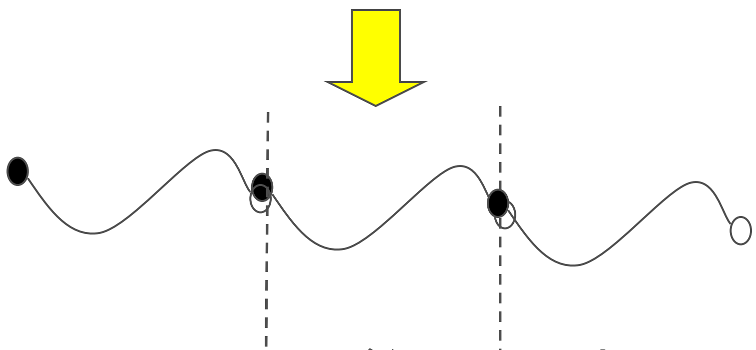
離散的フーリエ変換
（DFT: Discrete Fourier Transform） と呼ぶ
DFTでは、 関数1周期あたりN個（Nは自然数）のサンプル値で表す。
以降、離散的フーリエ変換を離散フーリエ変換と呼ぶ

非周期関数を切り出して周期関数扱い

連続変化信号



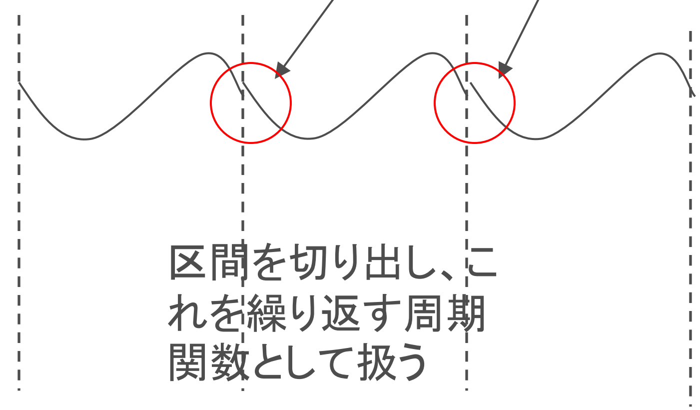
一定区間を切り出す



この区間が繰りかえす
周期関数として扱う

-実際には一定区間を切って次々に変換を行なうと周期の最初と最後の値は一致しません。非連続点が発生するこの影響を後で考察しましょう。

実は、完全にはつながりません
そのままだと、ギブス現象が発生しますので、(むりやり?)繋げるために窓関数をかけます。



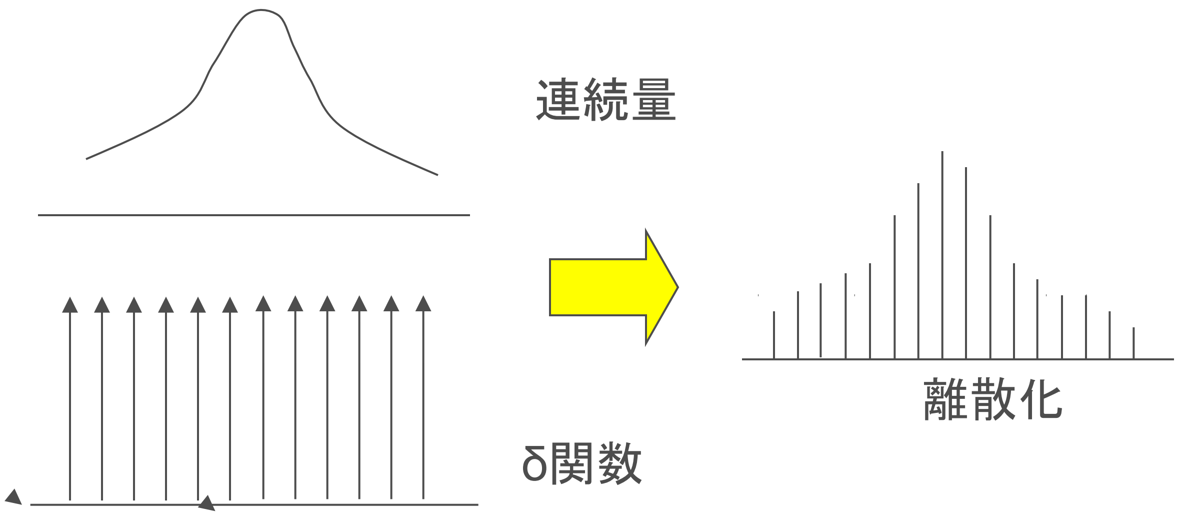
区間を切り出し、これを繰り返す周期関数として扱う

離散フーリエ変換

離散フーリエ変換

フーリエ変換では、数学的な導出で連続量が前提でしたが、実際の物理現象を数値的に解析し、これを計算処理する場合には、その値は離散量になります。そのため離散量を扱えるように数学的な拡張を行います。

連続変化の関数から、離散量を得るためには、ディラックのデルタ関数を与関数にかけます。ここでδ関数は、時間軸の幅がゼロで振幅が∞で積分値が1の超関数です。このような信号をインパルスとよびます。(デジタルフィルタの項目で扱います。)



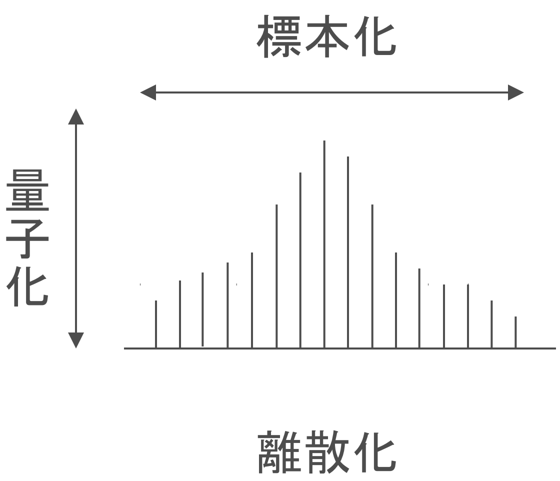
標本化と量子化の問題

連続量の離散化により、一部の情報が失われますが、**標本化定理により、標本化周波数の1/2の周波数以下の信号**は信頼できます。CDやディジタル・オーディオのサンプリング周波数は、44.1KHzになっていますが、これは人間の可聴周波数の上限の20KHzの2倍以上を根拠として再生周波数の上限を20KHzにしています。

一方、振幅方向を考えると、計算のための量子化が行なわれます。

量子化の分解能を16ビット(CDの場合)とすると、LSBとMSBの重みの比は、1:2^16=1:65,536になります。これは、MSB側のアナログ的な精度が、0.0015%狂うとLSB側の1ビットの値を変えてしまうということなります。

また、16ビットで、0から5Vの電圧を表現するとしたら、最小の分解能は、76.293uVになりますから、これ以下の電圧を扱うことができませんし、実際の電子回路のノイズは、この数十倍にも及んでしまいます。



アナログ信号をデジタル化することをA/D変換といいます。その逆をD/A変換といいます。

前者の処理をする装置を、Analog Digital Converter (ADC), 後者をDACといいます。

基本的は、パラメータは、サンプリング周波数と変換のビット幅になり、それぞれ、標本化と量子化に対応しています。

離散化された値は、離散フーリエ変換として処理することになります。これがフィルターとともに、デジタル信号処理の要となります。

離散フーリエ変換

連続信号に対するフーリエ変換に対し、ディジタルコンピュータで扱うサンプル値データに対するフーリエ変換を離散的フーリエ変換

（DFT:　Discrete Fourier Transform）と呼ぶ

予習用コンテンツ

ディラックのデルタ関数

インパルス信号

サンプリング定理とナイキスト周波数

サンプリングと量子化歪(雑音)

非周期信号の周期関数化 – 窓関数

FFT演算アルゴリズム

Memo

フォローアップURL

http://mikami.a.la9.jp/meiji/MEIJI.htm

担当講師
三上廉司(みかみれんじ)
Renji_Mikami(at_mark)nifty.com
mikami(at_mark)meiji.ac.jp
http://mikami.a.la9.jp/_edu.htm