Computer Science A
Hardware Design Excise Text 2
Mathematics Basics May 9th.,2019

CSAHW Computer Science A, Meiji University

CSA_B3_Text_2.pptx 57 Slides

Renji Mikami

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

Contents

ベクトルと空間
数と演算
積分変換と核関数
オイラーの公式と複素正弦関数
連続量の離散化とδ関数
正規直交関数列
フーリエ級数

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

講義編2:数学的基礎の解説

実際のシステムを開発では、広範囲の数学分野の定理や成果を使います。ここでは限られた時間で能率的に重要な数学のポイント習得を目指します。

式が理解できなくても、式と解き方を暗記すれば、試験で点数をとることはできますが、本質を理解しているとはいえませんし、応用がききません、何よりおもしろくありません。ひとつの式や定理を多様に理解、応用できるようになれば、がぜん数学が、おもしろく、楽しくなります。

ここでは、数式を多様に解釈し、脳中に直感的イメージを作りながら、理解を進めます。特に重要な定理以外は導出を行いません。すでに数学的に厳密な証明がなされているものは、その成果をそのまま使います。むしろ定理や数式の多様な理解とそれらがどのように関係して、その組み合わせがどのように実際の研究や開発で有用に”使えるのか”を体得してください。

ジャングルのような数学の諸分野も、整理して道筋を整理して眺めれば、全体が良く理解でき、個別の難問で迷路に踏み込んでも、方向が見えて、先に進むことができると思います。直感的に本質の理解を進めてどんどん前進しましょう。厳密な証明は、あとでゆっくりとやればいいでしょう。

計算もコンピュータ上でできます。証明や式の導出演習は絶対に必要ですが、必要以上の時間を手計算で浪費するのは、懸命とはいえないでしょう。二つをうまくミックスして使いましょう。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

ポイント・重要項目

1.関数　-関数は、無限次元ベクトル

2.空間、平面、要素の集合(実数、複素数-正則性)領域

3.連続と離散　-> 超関数

4.積分

-4.1 積分が可能な条件(CR関係式)

-4.2 定積分の捉え方、関数をかけて積分、相関計算

-4.3 積分変換

-4.4 積分はベクトルの内積計算、内積計算は行列積

5.正規直交性

-5.1 関数の直交性、

-5.2 直交ベクトルの内積はゼロ

6.フーリエ変換とラプラス変換

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

ベクトルと空間

数と演算

ベクトルの概念を拡張し、関数(注：信号)を無限次元ベクトルとして扱います。
この関数は、その値域の中で連続量の場合と離散量の場合があります。

ベクトルには、内積、直交、正規性などの概念がありますが、関数にもこの概念があてはまります。2関数をかけて積分することは、ベクトルの内積計算になります。内積は、ベクトル要素の行列積になりますから、無限次元ベクトル関数の行列積を求めることになります。この空間は、ヒルベルト空間です。

注：数学では関数といいますが、工学では信号といいます。同じものです。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

空間とベクトル

空間(ある性質を持った要素の集合)

- 元、演算、単位元の存在->集合が群を成しているか
  - 演算結果もまたもとの集合に属するか

元としての数の性質

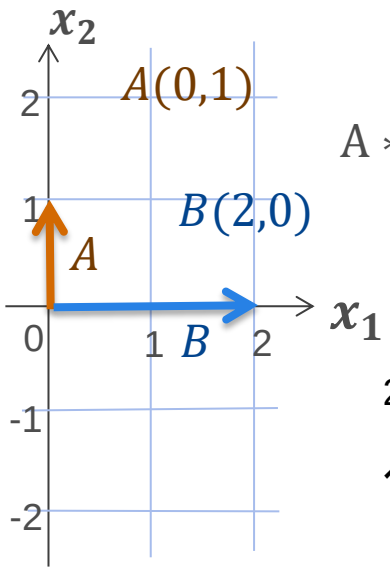
- 実数と複素数(正則性)
- 連続量と離散量(数列)

ベクトル

- ベクトル概念の拡張
- 内積
- ノルム
- ベクトルの直交

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

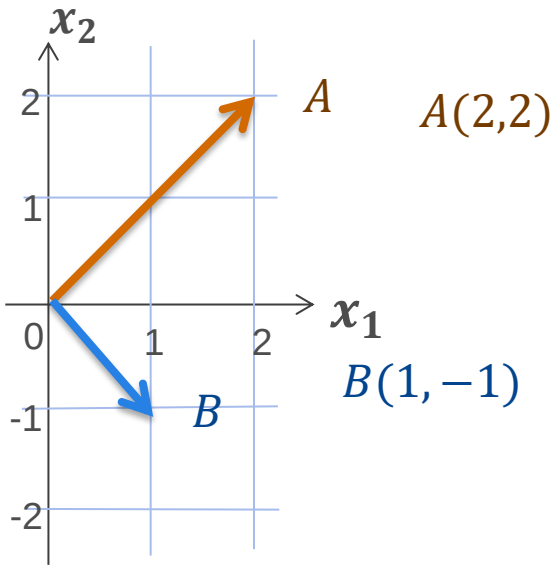
ベクトルの内積と直交(ユークリッド平面)



$$A * B = (0 \times 2 + 1 \times 0) = 0$$

2次の点ベクトルA,Bの内積は、
各要素の積の和となる。

ベクトルが直交するときは内積
は0となる。



演習2.1.1 直交する3次(x_1, x_2, x_3,)のベクトル
A,B,Cの例をあげ、要素を示し図示せよ。
N次の直交点ベクトルについて考察せよ。

$$A * B = (2 \times 1 + 2 \times (-1)) = 0$$

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

ベクトルの拡張(関数を無限次元ベクトルへ)

ベクトル

2次、3次ベクトル
$A(x_1,x_2)$
$C(x_1,x_2,x_3)$

N次の直交点ベクトルを数列と考える
さらに無限次元に拡張すると連続量の関数と考えられる。

演習2.1.2　同様に右の角余白に
K,x2= f(x1) を図示せよ図示してみよう

ベクトルの要点
1.内積
2.ベクトルの直交
3.ノルム(正規性)

数列(離散量)

閉区間
n次元ベクトル
$k_1,k_2 \ldots k_{n-1},k_n$

N=5の場合
$K(k_1,k_2\ k_3,k_4,k_5)$

開区間[-∞～+∞]
無限次元ベクトル
$K_{-n},k_{-n+1} \ldots k_{n-1},k_n$

N=1~∞の場合
$K(k_1,k_2\ k_3,\ldots,k_\infty)$

関数(連続量)

閉区間
無限次元ベクトル

$x_2= f(x_1)$, x_1[a.....b]

開区間[-∞～+∞]
無限次元ベクトル

$x_2= f(x_1)$, x_1 [-∞～+∞]

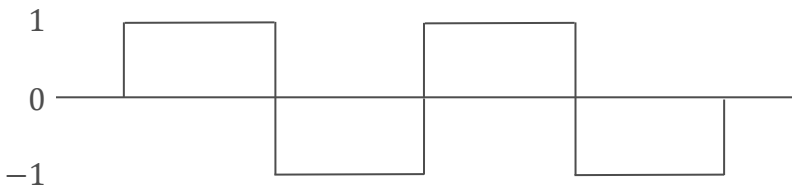
© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

N次元ベクトルの直交性

閉区間における8次元ベクトル"K"を例にとり考察します。

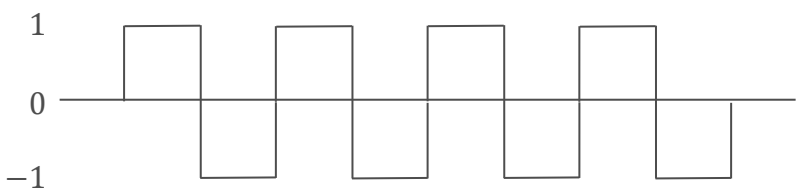
(各次元のベクトル(k_n)は直交しています。これは数列です。級数の一部と考えてもいいです。離散値ですが直観的に面積を持つような図にしてあります。またこの図から、要素が周期性を持つことがわかります。)

$K = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8)$ 値はパルストレインから読み取ってください



ベクトルを無限次元に拡張し、開区間$\pm\infty$にとると連続量の関数になります。

同様に $L = (l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8)$を以下のとおりとします



$$P = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \ldots k_7 & k_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_7 \\ l_8 \end{pmatrix}$$

演習 2.2.1：KとLの内積Pを計算して、ベクトルKとLの関係を述べてください。

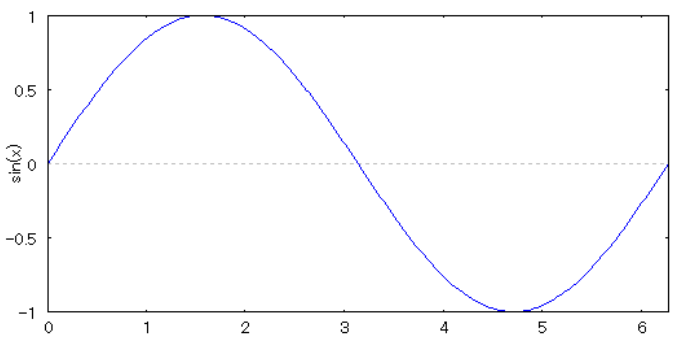
maxima を使ってもいいです。(演習 2.9.1 参照)

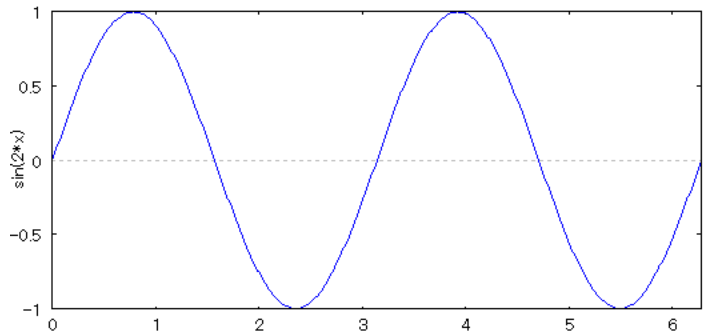
© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

連続量N次元ベクトルの直交性

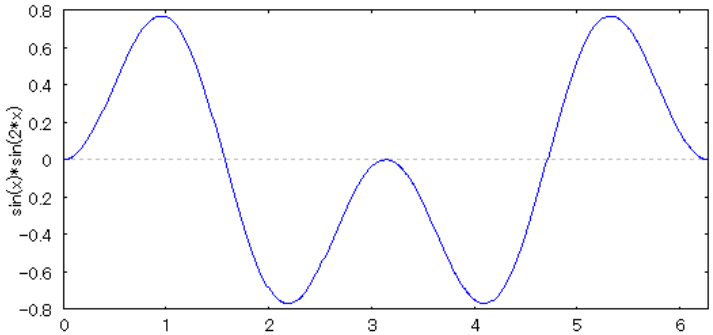
続いて$\sin(x)$と$\sin(2x)$の連続量無限次元ベクトルを考察します。
離散量の行列積は、無限次元ベクトル=関数では、積分になります。

演習 2.3.1　$P = \int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(2x)\,dx$ を計算してください。





$\sin(x) * \sin(2x)$は右図のような
グラフになります。
x軸から見ると定積分を
視覚的に捉えられます。



列ベクトルの直交と比較してください

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

ベクトルの性質を関数に適用

1.内積（と積分、行列積、相関)

1.1 ベクトルの内積は、ベクトル成分の行列積

1.2 関数はベクトルだから内積は行列積で求められる

1.3 二関数の内積は、二関数をかけて積分して求める。

1.4 この内積=“関数をかけて積分”することの意味を理解する。

1.4.1 関数Aと関数Bをかけて積分するということは、相互の相関を計算すること。

1.4.2 得られた関数は、”相関関数”である。

1.4.3 相関が無ければ、値はゼロになり、2ベクトルの内積がゼロ

1.4.4 このとき”関数は直交”している(相関がない)。

2.ベクトルの直交

直交座標系のベクトルでは成分が2または3で、直交の状態は2次元、3次元空間で視覚的にわかる。フーリエ級数展開では、要素がそれぞれ直交する無限次元の直交関数列を使用する

例：$\cos x, \cos 2x, \cos 3x \ldots \cos nx$,　$\sin x, \sin 2x, \sin 3x \ldots \sin nx$　nは正整数

3. ノルム(正規性）

上の直交関数列は正規性をもつので、正規直交関数列

フーリエ級数は、もとの関数とsin,cosの正規直交関数列との相関を求めたもの

相関の割合が、係数である。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

積分変換と核関数

もとの関数に核関数をかけて積分し、別の変数による関数を作るのが積分変換です。
フーリエ級数では正規直交関数列を核関数に使います。
もとの関数の核関数に対する相関(成分量)を係数として得ます。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

数と微積分について

1.群と写像

ある数(要素)の集合とこれに対してある演算を定義したとき、その結果もまたある数の集合に属するかを意識しておく。また要素と演算の結果が写像になるかを意識する。

2.演算の成立条件

微分、積分が成り立つ条件を意識する。微積分が成立しないときには計算ができない。

3.数の領域に注意

実数領域か複素領域かを意識する。

4.連続と離散

変数が連続か離散かを意識する。関数が周期関数かどうか意識する。

まずは、これらの問題意識を持って式を見てください。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

積分について

1.積分はベクトルの内積計算

-二関数をかけて積分(関数=無限次元ベクトル同士の内積計算):

ある関数に、直交関数列をかけて積分するということは、その関数と直交関数列との相関をとることです。相関をとるということは、もとの関数に含まれる直交関数列の成分を計算することです。相関が0ということは、関数が直交していることを示しています。

-内積計算は、成分の行列積

かけて積分することは、二関数のベクトルとしての内積計算であり、行列積の計算になります。離散フーリエ変換では、二関数の乗算-積分を二関数の離散量の行列積を計算します。

-積分変換では、元の関数に対して、2変数の核関数をかけて定積分し、

もとの関数の変数を消去して、核関数の残った方の変数による関数に変換します。フーリエ変換では、t (時間変数)が消え、ω (周波数変数)による関数に変換

2.関数の直交性:

ある関数の集合があり、そのうちの任意の二つを取り出したときにそれらが直交していれば、この関数の集合は、直交関数系をなしています。直交とは、ベクトルの内積が0になることです。また自分自身の内積が1になる場合は、特に正規直交関数系といいます。

フーリエ変換では、時間関数に複素正弦関数(正規直交関数列)をかけて積分します。正規直交系関数列は、1次独立ですから、関数は正規直交系関数列の線形結合で、一意に定まります。よってフーリエ変換は、ただひとつ定まることになります。フーリエ変換は、正規直交系関数列を核関数とした積分変換です。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

数式の意味を読み解く

積分変換・直交性

皆さんは、大学受験のための勉強の成果もあり、高校数学の延長としての数式の計算力は、かなり鍛えられていると思います。このような数学では、計算力とその実用性に重点があり、その数学の背後にあるより普遍的な数学的な考え方の解説は行われません。とにかくこの定理を覚えなさい。計算方法に習熟しなさい。暗記しとけば問題が解けて点数はとれます。

実際は、計算のテクニックに重点を置いた高校数学に比べて、大学レベルの数学のほうが、はるかに奥が深く面白いのです。

大学の数学では、数式に深い意味があります。この意味を理解して読み解くと、素晴らしい数学の世界が開けてきます。数式の導出で計算間違いをしても気にせず、数式の意味するところを、脳の中に何通りもの解釈でイメージして理解すれば、迷路のように思えた数式ジャングルの世界が、ドミノ倒しのように、立て続けに理解できていきます。

フーリエ変換は、積分変換の中でも極めて優れたもので、この理解があらゆるものにつながっていきます。コンピュータ・サイエンスでは、離散量への展開で、高速フーリエ変換をはじめとして、研究が続いており、今日でも新たな発見、成果が見られます。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

いろいろな積分変換

$$(Tf)(\nu) = \int_{t1}^{t2} K(\nu, t) f(t) dt$$

積分変換の表

名称	記号	K	t_1	t_2	K^{-1}	u_1	u_2
フーリエ変換	$\mathcal{F}$	$\frac{e^{-iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	∞	$\frac{e^{+iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	∞
フーリエ正弦変換	$\mathcal{F}_s$	$\frac{\sqrt{2}\sin(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	∞	$\frac{\sqrt{2}\sin(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	∞
フーリエ余弦変換	$\mathcal{F}_c$	$\frac{\sqrt{2}\cos(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	∞	$\frac{\sqrt{2}\cos(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	∞
ハートレー変換	$\mathcal{H}$	$\frac{\cos(ut)+\sin(ut)}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	∞	$\frac{\cos(ut)+\sin(ut)}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	∞
メリン変換	$\mathcal{M}$	t^{u-1}	0	∞	$\frac{t^{-u}}{2\pi i}$	$c-i\infty$	$c+i\infty$
両側ラプラス変換	$\mathcal{B}$	e^{-ut}	$-\infty$	∞	$\frac{e^{+ut}}{2\pi i}$	$c-i\infty$	$c+i\infty$
ラプラス変換	$\mathcal{L}$	e^{-ut}	0	∞	$\frac{e^{+ut}}{2\pi i}$	$c-i\infty$	$c+i\infty$
ワイエルシュトラス変換(英語版)	$\mathcal{W}$	$\frac{e^{-(u-t)^2/4}}{\sqrt{4\pi}}$	$-\infty$	∞	$\frac{e^{+(u-t)^2/4}}{i\sqrt{4\pi}}$	$c-i\infty$	$c+i\infty$
ハンケル変換		$t\,J_\nu(ut)$	0	∞	$u\,J_\nu(ut)$	0	∞
アーベル変換(英語版)		$\frac{2t}{\sqrt{t^2-u^2}}$	u	∞	$\frac{-1}{\pi\sqrt{u^2-t^2}}\frac{d}{du}$	t	∞
ヒルベルト変換(英語版)	$\mathcal{H}il$	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{u-t}$	$-\infty$	∞	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{u-t}$	$-\infty$	∞
ポアソン核(英語版)		$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$	0	2π			
恒等変換		$\delta(u-t)$	$t_1 < u$	$t_2 > u$	$\delta(t-u)$	$u_1 < t$	$u_2 > t$

出典引用
:WikiPedia

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

関数同士をかけて積分して新しい関数を求める

1.もとの関数に対して、“意図的にかける”ほうの関数を”核関数”、とよびます。

2.積分変換では、そのままの形では計算のやっかいな”関数”を適切な”核関数”をかけて積分し、扱いやすい別の形の関数に変換します。変換後にさまざま計算や処理を行い、そのままの形で使ったり、逆変換を行い、もとの”関数”の形に戻して使います。

3.かける核関数によって、さまざまな変換になります。代表的な変換として、ラプラス変換とフーリエ変換を例にとって考えてみるとよくわかります。

4.ラプラス変換の”核関数”は、e^{-st}で、フーリエ変換の”核関数”は、$e^{-j\omega t}$となります。このようによく似た形になっています。しかし”核関数”の違いにより変換の目的が大きく変わります。

5.もとに”関数”のままでは解が求めにくいような関数の場合も、ラプラス変換によって、収束しやすい関数に変換したり、計算の困難な式が複素関数に変換することで代数的に解けます。また逆変換も成り立ちます。

6.フーリエ変換の場合は、もとの”関数”に、 ”核関数”として、複素正弦関数$e^{-j\omega t}$ をかけて積分します。この変換によって、時間領域の”関数”は、複素周波数領域の関数に変換され、別の視点”周波数軸”での解析が可能になります。このようなフーリエ解析では、周波数ごとにそのパワースペクトルが数値的に求まり定量的な解析ができます。

7.フーリエ変換でかける ”核関数”の複素正弦関数$e^{-j\omega t}$ は、正規直交系関数列です。この”核関数”をかけて積分することは、もとの”関数”と正規直交関数$e^{-j\omega t}$ との相関を計算することであり、もとの”関数”に含まれる$e^{-j\omega t}$ の成分を計算することと考えればいいでしょう。また、正規直交関数列は、一次独立ですから、この積分変換によって得られる関数は一意に定まることがポイントです。

核関数が、2変数関数というのがミソ

”関数”(=信号)を離散化(サンプリング)する場合もδ関数を関数にかけて積分します。

$e^{-j\omega t}$ は、周期2πのときは $e^{-j\theta}$ となります。jは、虚数単位。eはネイピア数です。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

変数の消去-入替え-積分のテクニック

定積分$\int_a^b f(x)dx$を計算すると“面積”が数値で求まります。

皆さんは、誰でもこのことを知っています。でもこの積分をよく見ると、変数xが消えています。実は、(核)関数をかけて積分するということは、変数をひとつ消しています。積分変換は、核関数が2変数関数なので、残りの変数が消した関数に置き換わります。

$$(Tf)(\nu) = \int_{t1}^{t2} K(\nu, t) f(t) dt$$

核関数が、2変数関数

$f(t)$は、時間tを変数とする時間函数です。

t(時間)とν(周波数)の２変数を持つ核函数$K(\nu,t)$をかけます。

そして、t(時間)で一定時間(t_1からt_2)積分します。

そうすると変数tが消えて、変数νが残ります。

つまり新しいνを変数とする関数ができます。

これによって、時間関数は周波数関数へ変換されます。

積分変換では､2変数の核関数をかけて、共通変数で積分し、

片方の変数を消去し、残った変数による関数を得ます。

フーリエ変換では、時間軸から周波数軸への変換になります。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

ラプラス変換の核関数

フーリエ変換の核関数は、$e^{-j\omega t}$ (複素正弦関数*)、ラプラス変換の核関数は、e^{-st} $(s \triangleq \sigma + j\omega)$です。

演習2.4.1

フーリエ変換とラプラス変換の核関数をグラフに図示してください

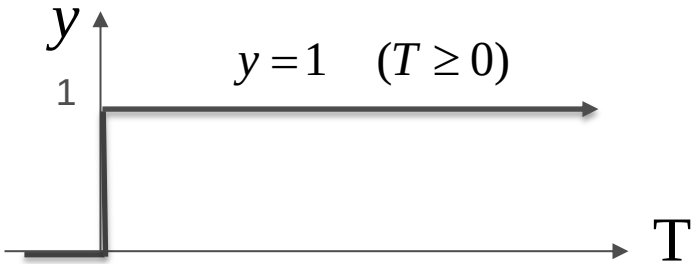
グラフは2次元または3次元とします。

*複素指数関数ともいいます

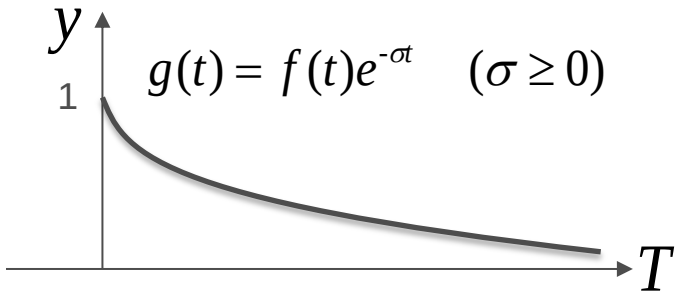
© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

ラプラス変換

フーリエ変換できない
ユニットステップ関数$f(t) = u_s(t)$



$e^{-\sigma t}$をかけて収束させる。



関数を収束させてからフーリエ変換を行う。

$$\int g(t)e^{-j\omega t}dt = \int f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$= \int f(t)e^{-st} \text{ただし} s \triangleq \sigma + j\omega$$ ラプラス変換式になりました。

このように、フーリエ変換とラプラス変換は、式の上では、相互にその特別な形と考えられますが、その意味は異なるものです。考察してください。

テキスト3,4,6で解説していきます

連続量	離散量	畳み込み積分
フーリエ変換	離散フーリエ変換	円状
ラプラス変換	Z変換	直線状

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

フーリエ変換の数学的なポイント1

フーリエ級数は、周期関数を対象にするが、フーリエ変換は積分区間を±∞にとして、非周期関数を対象とします。(周期を±∞に拡張することは非周期)

級数の場合は、線スペクトルの集まりとなるが、フーリエ変換では、スペクトルが連続し連続関数になります。

フーリエ変換は、積分変換のひとつ。積分変換は、もとの関数に対し、２変数を持つ核関数をかけて(もとの関数の変数で)積分し、もとの関数の変数を消去。よって残った変数は、核関数の２変数の残りのひとつとなります。これで変数が交換され、新しい性質の関数が得らます。数式を日本語で書くと

新しい関数(新しい変数)＝もとの関数の変数で定積分[核関数(新しい変数,もとの変数)*もとの関数(もとの変数)]

ラプラス変換もこの積分変換のひとつです。(じゃあどこが違うんでしょう？)

$$(Tf)(\nu) = \int_{t1}^{t2} K(\nu, t) f(t) dt$$

新しい関数f(新しい変数ν)＝もとの関数の変数 t で定積分[核関数K(もとの変数t, (新しい変数ν)*もとの関数f(新しい変数t)]

t が時間変数、νが複素周波数変数とすると、時間関数が複素周波数関数に変換されます。

核関数のνは複素数なので、同時に複素関数に変換されている点に着目

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

フーリエ変換の数学的なポイント2

sin, cos は直交関数

直交 > 直交するベクトルの内積は0、直交する関数同士をかけて積分すると0になります。(内積は積分であり、ベクトル要素の行列積。関数をかけて積分すると0になることの意味を理解すること) 直交する sin, cos をオイラーの公式で

ひとつにまとめたものが複素正弦関数です。

$$e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t, (\omega t = x)$$

t: 時間の関数とx: 長さの関数による表現

複素正弦関数との相関計算

フーリエ変換は、もとの関数に複素正弦関数(核関数)をかけて積分します。(積分変換で、時間 t の関数から、複素周波数 ω の関数に変換する)

これは、もとの関数と複素正弦関数の相関計算ともいます。(相関関数を求めること)

周期性

フーリエ級数は離散値(=数列)、離散フーリエ変換も離散値で、“とびとびの値”の周期関数であることに着目してください。このとき、かける核関数も離散値です。

周期関数のため、複素正弦関数の離散値は回転因子(TF:Twiddle Factor-テキスト3で解説)となり、この行列積(積分に相当)を計算します。回転因子は、正方行列になり周期性によって円状畳み込み積分ができます。(テキスト4で解説)

FFT:高速フーリエ変換

このTFの周期性と対称性を利用して計算量を劇的に削減するのが、FFTのアルゴリズムです。(テキスト5で解説)

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

フーリエ変換の数学的なポイント3

デジタル信号処理では、LTI(線形時不変)システムを基礎とし、時間領域では、インパルス応答の重ね合わせを利用します。この計算は、直線上畳み込み積分になります。ラプラス変換の離散化版はZ変換になります。(テキスト6のLTI/デジタルフィルター設計で扱う。)

離散フーリエ変換は、一定区間を区切って、この区間が何度も繰り返されるものとしてその区間を周期関数として扱います。このとき連続量としての入力は、時間方向に離散化(サンプリング)され、振幅方向に離散化(量子化)されます。離散フーリエ変換で得られた関数は、複素周波数関数のため、実数の振幅値はこの絶対値を計算します。

連続関数から離散値を得る場合には、もとの関数にδ関数をかけて積分します。これが、サンプリング(標本化)です。(ディラックのデルタ関数とは、$t = 0$の時だけ値を持ち、その振幅(値)が無限大で、積分値1の超関数, これは後の演習でラプラス/フーリエ変換してみます。)

標本化定理に従い、サンプリング周波数を定めるが、サンプリング周波数の1/2をナイキスト周波数といい、ナイキスト周波数以上の値ではエイリアシングが発生して正しい値を持ちません

。例:CDのサンプリング周波数は、44.1KHz、これは可聴周波数帯20-20KHzの上限20KHzを考慮して定めています。

実際の連続変化信号はたいがい周期的ではありません。これを一定周期で区切って、この周期が繰り返すと見做して離散フーリエ変換を行います。この場合周期のつなぎ目が非連続になりギブス現象が発生するため、窓関数をかけて、つなぎ目をスムーズにして擬似的に連続周期関数にします。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

オイラーの公式と

e^{jx} 複素正弦関数(注)

導出は、テキスト3を参照してください。ここでは、変換の骨組みに
使うオイラーの公式、ド・モアブルの定理、複素数への拡張を示します。
導出計算が長く続くと迷子になりやすいので、見通しをつけておきます。
複素正弦関数が核関数になる点、複素フーリエ級数と離散フーリエ変換では、もとの関数が"とびとびの値"をとるので、核関数も離散値になります。

複素数は正則性のため、微積分が実数とは全く異なります。興味のある人は、とても面白いので、ぜひ複素関数論を学んでみて欲しい。
正則性というのは、ある点とその近傍にあるすべての点において微分可能であるということで、一度微分ができればその導関数も何回でも微分可能です。実数と違って、ある点に近づく近づきかたが無限にあります。
微積分が成り立つ条件に着目。CR関係式とディリクレ条件は後述します。

(注) 複素指数関数ともいいます。尚、複素余弦関数という言葉はありません。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

変数と変換について

θを弧度法による角度(単位:ラジアン)とし正弦関数を$y = sin\theta$ とします。
$y = f(\theta)$は円弧の長さ(で角度を表現した)の変数としています。

ωは、θを時間 t で微分したもので、角周波数、(角振動数、角速度)と呼ばれます。

時間関数の場合には、ωtを使います。
周波数関数の場合は、周波数 f 、周期 Tを使用します。自由に変換できるようにしておいてください。

虚数単位は、ここでは、i ではなく j を使用します。
$j^2 = -1$です。

本資料で使用している
変数 x も角度を、
円弧の長さであらわしています。

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad .....radian/\sec$$

$$\theta = \omega t, \quad \omega = 2\pi f,$$

$$f = \frac{1}{T},$$とおけば

$$\theta = \omega t = 2\pi f t = 2\pi \frac{1}{T} t$$

となります.

周期$T = 2\pi$のときは、

$\omega = 1 \qquad radian/\sec$です。

角周波数は、円運動での単位時間の回転角になります。この運動を真横から見ると単振動になり、この往復数を角振動数といい、一周が一往復に対応します。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

周期関数

以下が成り立つとき周期関数であるといいます。

$$f(t) = f(t + nT_0) \qquad (n = \text{正整数})$$

T_0は、周期の中で最も短いもので基本周期といいます。
時間関数で解く場合は、変数をωtとして

1周期 $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$ または $\int_0^T$ で積分します。

周期が2πの場合は、変数を$x\left(= \omega t,\quad \omega = 1\right)$として(注)

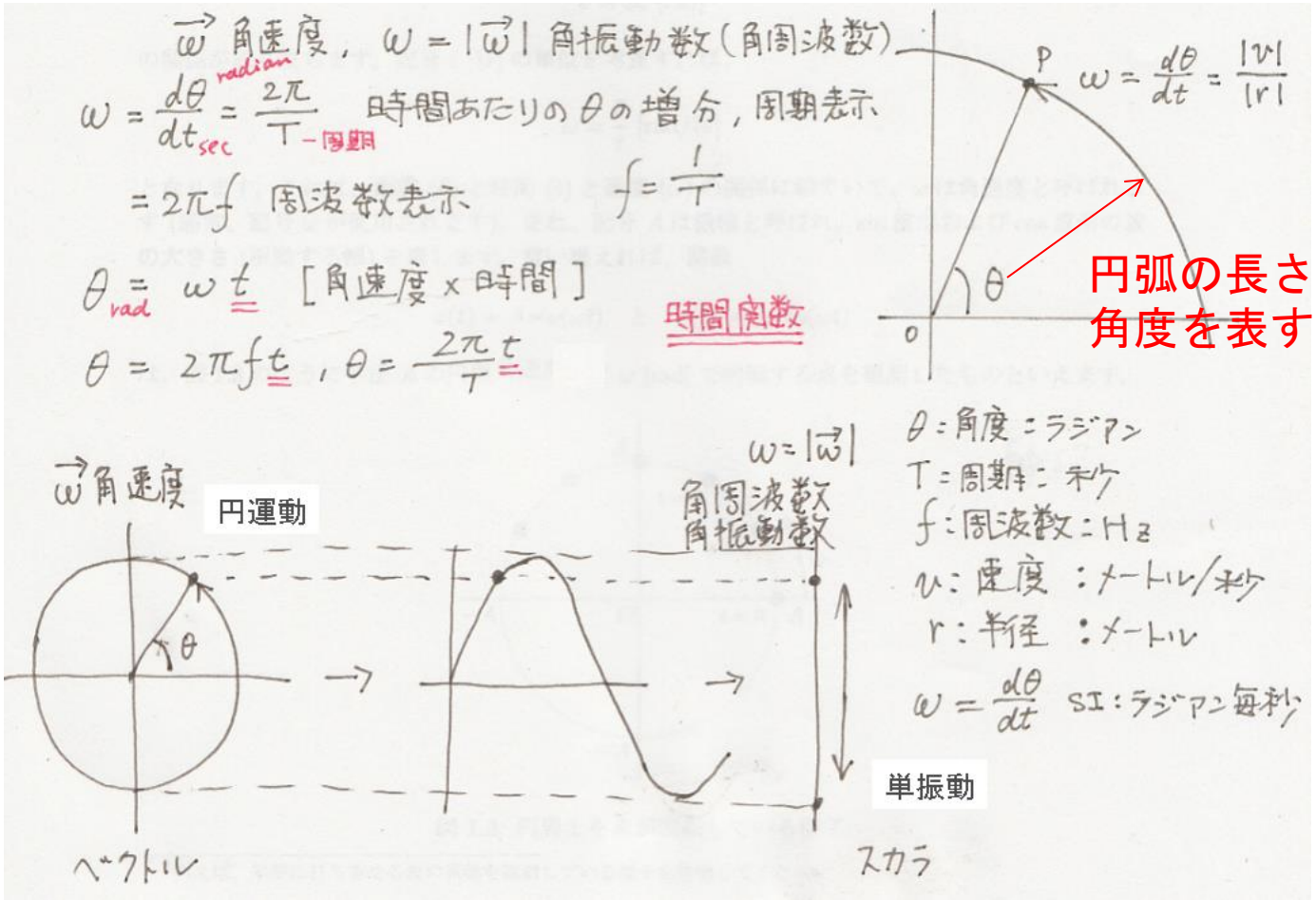
1周期 $\int_{-\pi}^{\pi}$ または $\int_0^{2\pi}$ で積分します。

(注)三角関数は周期$T = 2\pi$のため、$\sin(\omega t)$ では$\omega = 2\pi\frac{1}{T} = 1$、
さらにtをxに置き換えています。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

ω, f, t, T 変数の関係

$$e^{jx} = e^{j\omega t} = e^{j2\pi f t} = e^{j2\pi \frac{1}{T} t}$$



時間t,
角速度
$\omega(= dx/dt)$、
さらに、
fを周波数と
すると、
$\omega = 2\pi f$、
また
周期 $T = 1/f$
から、
式は角速度、
周波数、
周期で
表現されます。
式の変形が
すぐにできるよう
にしておいて
ください。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

演習問題2.3

演習 2.5.1 : 正弦関数を、
$y = \sin x$とし角度xに対し, 周波数f, 時間t, 角周波数ω, 周期Tとして

$$y = \sin(2\pi \frac{1}{T} t)$$を導いてください。

演習 2.5.2 オイラーの公式を使って$\sin x$を$\cos x$ネイピア数を使って表してください。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

ネイピア数と複素正弦関数の微積分

e:ネイピア数：微分しても元の関数と同じになる定数

$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ の極限

指数函数　$f(x) = a^x$ において $\frac{d}{dx}a^x = a^x$ となるとき $a = e$

e^{jx} 複素正弦函数

ここで、xで微分すると

$$\frac{d}{dx}e^{jx} = je^{jx}, \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ より}$$

$$je^{jx} = e^{j\frac{\pi}{2}}e^{jx} = e^{j\boxed{(x+\frac{\pi}{2})}}$$

$\frac{\pi}{2}$だけ反時計回りに回転

ここで、xで積分すると

$$\int e^{jx}dx = \frac{1}{j}e^{jx}, \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \text{より}$$

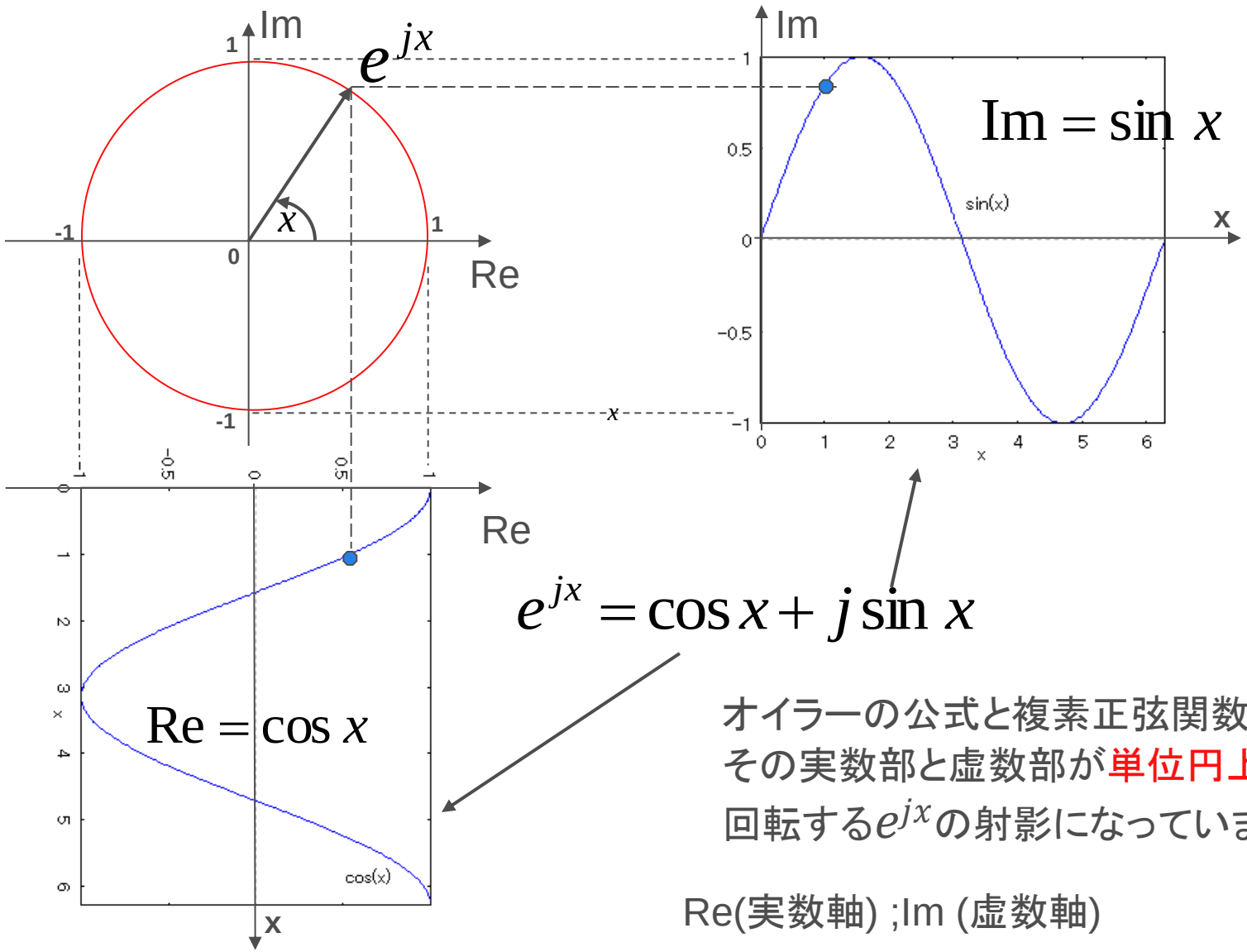
$$\frac{1}{j}e^{jx} = e^{jx}e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{j\boxed{(x-\frac{\pi}{2})}}$$

$\frac{\pi}{2}$だけ時計回りに回転

実数領域の三角関数の式を複素数に拡張して複素正弦関数に
変換すると微積分の計算が容易になります。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

極形式からみる複素正弦関数



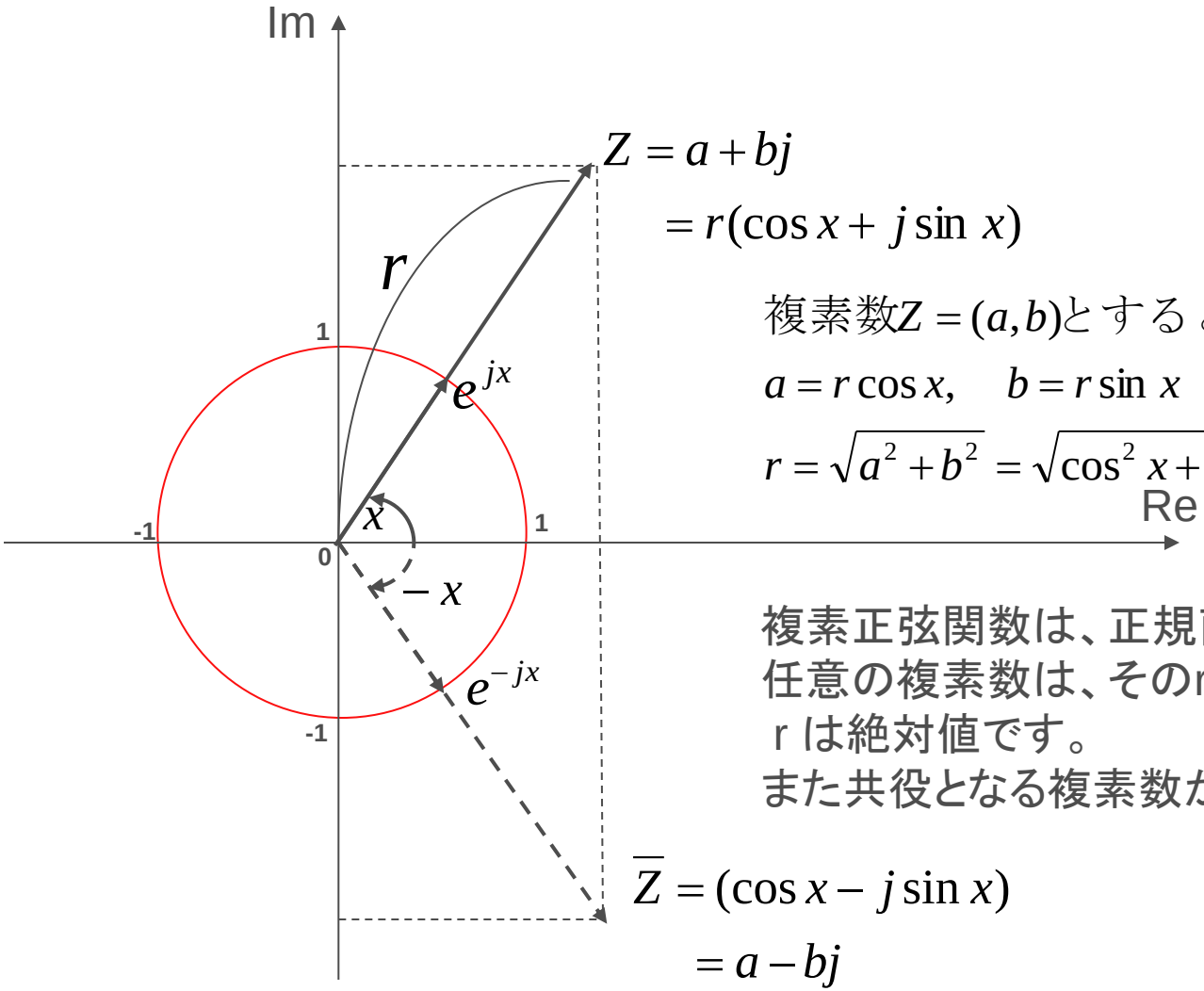
$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

オイラーの公式と複素正弦関数e^{jx}、
その実数部と虚数部が**単位円上**を
回転するe^{jx}の射影になっています

Re(実数軸) ;Im (虚数軸)

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

任意の複素数とその共役複素数



複素数$Z = (a, b)$とすると

$a = r\cos x, \quad b = r\sin x$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$

複素正弦関数は、正規直交関数なので
任意の複素数は、そのr倍で表されます。
ｒは絶対値です。
また共役となる複素数が存在します。

$\overline{Z} = (\cos x - j\sin x)$

$= a - bj$

Re(実数軸) ;Im (虚数軸)

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

ネイピア数とオイラーの公式

e:ネイピア数：微分しても元の関数と同じになる定数

$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$の極限

指数函数　$f(x) = a^x$において$\frac{d}{dx}a^x = a^x$となるとき$a = e$

オイラーの公式

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j\sin x$$

ド・モアブルの定理(nは整数)

$$(\cos x + j\sin x)^n = \cos nx + j\sin nx$$

$$(e^{jx})^n = e^{jnx}$$

三角関数がネイピア数の**複素関数で表される**
ド・モアブルの定理で**n倍角の場合に一般化**できる

$$\cos nx = \frac{e^{jnx}+e^{-jnx}}{2}, \sin n\theta = \frac{e^{jnx}-e^{-jnx}}{2j}$$

フーリエ級数のsin,cosの項がひとつにまとまり、**複素正弦関数化**できる

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$　式は(テキスト3参照)

$$f_{(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnx}$$ ...テキスト3(6)式.....とあらわせる

C_nは複素係数、e^{jnx}は複素正弦関数

三角関数による
フーリエ級数は、
ネイピア数を含んだ
複素級数に変換できます

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

複素フーリエ級数の係数

テキスト3の導出計算から抜粋して積分変換部をみると

Preview

以下はC_k複素係数を求める式の部分の抜粋

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx - j\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - j\sin kx)dx$$ ド・モアブルの定理から

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jkx}dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2....)$$ ...テキスト3(7)式

もとの級数 $f_{(x)}$に e^{-jkx} （核関数）をかけて1周期ぶん積分

もとの関数は、級数(とびとびの値をとる=数列)になっている点に着目してください。
離散量も(連続量に対して)とびとびの値をとりますから、計算上は同じ扱いになります。また周期関数で、かつkが整数であることにも着目してください。
離散フーリエ変換で使用するTwiddle Factor(ひねり係数)は、核関数の離散値で、
複素平面上の単位円をm等分した点(1の冪根)上に存在し、mが整数なので回転して元の値の点を繰り返し通ります。離散フーリエ変換では、kを一定数mとして計算します。
この計算は、もとの関数(m次元ベクトル)に対してm行m列の正方行列の核関数をかけた行列積計算になります。(テキスト4離散フーリエ変換でくわしくやりますが、ここで見通しをつけておきましょう)

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

テキスト4から抜粋：基底周波数成分 D_1(k=1)計算のための行列積(積分)計算

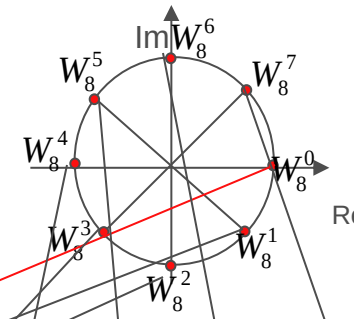
Preview

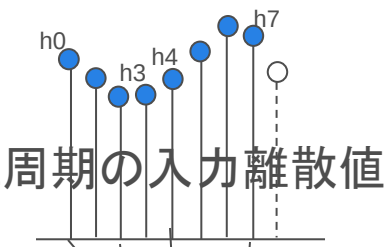
D0が、定数項(直流項),
D_1が基底周波数x1の成分,(n=1 の場合)
係数は複素数(a+bj)
振幅スペクトル|Z|=√(a^2+b^2)で計算
D2が2倍の周波数成分,
D3が3倍の周波数成分,

e^{-jnx}核関数　　$f(x)$

複素指数関数値

$$e^{-j2\pi\frac{1}{M}kn}$$





1周期の入力離散値

n=1の場合

D0
D_1
D2
D3
D4
D5
D6
D7

=1/8

ひねり係数行列

W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
W^0	W^2	W^4	W^6	W^8	W^{10}	W^{12}	W^{14}
W^0	W^3	W^6	W^9	W^{12}	W^{15}	W^{18}	W^{21}
W^0	W^4	W^8	W^{12}	W^{16}	W^{20}	W^{24}	W^{28}
W^0	W^5	W^{10}	W^{15}	W^{20}	W^{25}	W^{30}	W^{35}
W^0	W^6	W^{12}	W^{18}	W^{24}	W^{30}	W^{36}	W^{42}
W^0	W^7	W^{14}	W^{21}	W^{28}	W^{35}	W^{42}	W^{49}

$W^0 := W_8^0$の略

h0
h1
h2
h3
h4
h5
h6
h7

D1=h0*W0+h1*W1+h2*W2+h3*W3+h4*W4+h5*W5+h6*W6+h7*W7

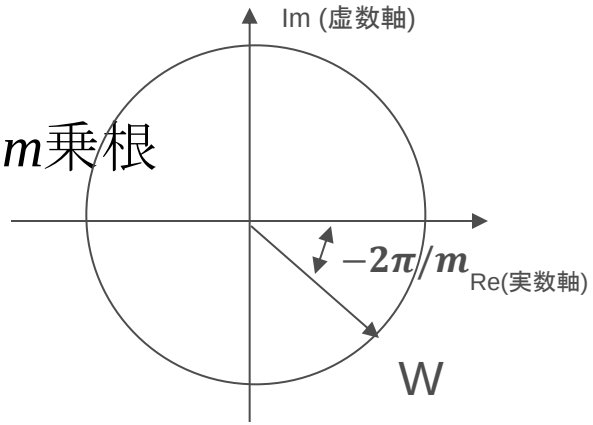
© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

1の冪根

- オイラーの公式と三角函数の周期性から、

$$e^{j2n\pi} = \cos 2n\pi + j\sin 2n\pi = 1 \quad (\text{nは整数})$$

$$W^{\mathrm{m}} = e^{j2n\pi} = 1 \quad (\text{mは整数})$$ とおくとWは1のm乗根



$$W = e^{j2\pi\frac{n}{m}}$$ ド・モアブルの定理より

$$e^{j2\pi\frac{n}{m}} = \cos 2\pi\frac{n}{m} + j\sin 2\pi\frac{n}{m}$$

$n = 0,1,2....$を代入、円周を$\frac{1}{m}$に分割した場所に解が存在

ついでに$e^{-j2\pi\frac{n}{m}}$は、$\cos 2\pi\frac{n}{m} - j\sin 2\pi\frac{n}{m}$

mが非0の整数であることに注意してください。
DFTでは、もとの関数が周期関数ですから、この冪根をかけていきますが、mが整数なので、TFの値は、何回転しても冪根値の上を通ることになります。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

1の冪根の計算

演習2.6.1　1のべき根を、M:2,3,4乗で(Maxima使用)計算せよ

($XM = 1$の根:W)

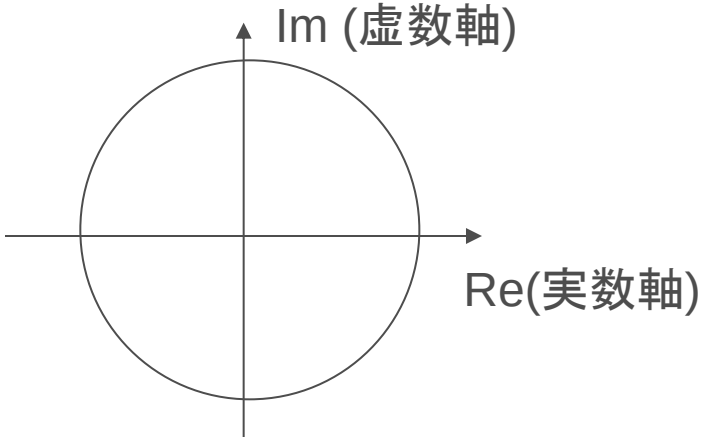
```
(%i1) solve (x^2=1,x);
(%o1)                    [x = - 1, x = 1]
(%i2) solve (x^3=1,x);
                sqrt(3) %i - 1        sqrt(3) %i + 1
(%o2)          [x = --------------, x = - --------------, x = 1]
                      2                     2
(%i3) solve(x^4=1,x);
(%o3)              [x = %i, x = - 1, x = - %i, x = 1]
```

solve : 解を求める
,x : xについて解く

sqrt() : 平方根

%i : 虚数単位

(%i^2 = -1)



演習 2.4.2 : X^Mの冪根Wを
ガウス平面にプロットしてください。

後述の離散フーリエ変換の W_n
Twiddle Factor(ひねり因子)
も、この1の冪根となり、ガウス
平面の単位円上に存在します。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

連続量の離散化とδ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

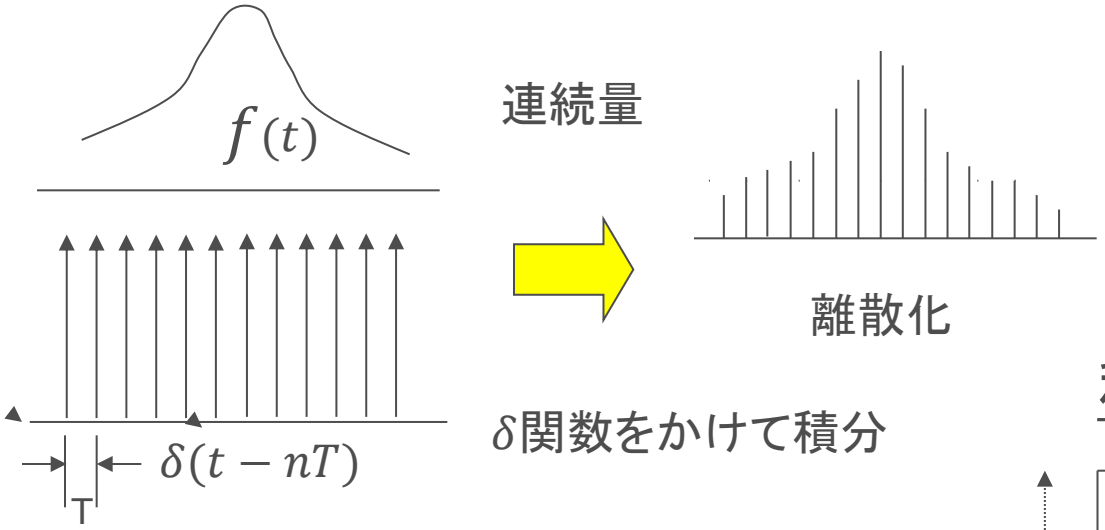
ディラックのδ関数は、$t = 0$のときだけ∞の値を持つ関数です。
($t = 0$ 以外のときは値がゼロです。) 区間$-\infty$から∞ での積分値は1です。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

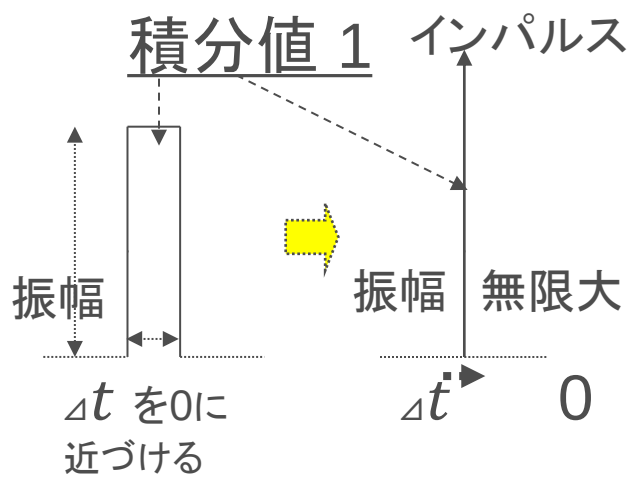
離散化: δ関数によるサンプリング

$$f(a) == \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt$$

連続して変化する関数(信号)から、ある時間 t における離散値(サンプリング値)を得るには、関数にδ関数をかけて±無限大の区間で定積分します。これによって変数 t が消えて、時刻aにおける離散値(サンプリング値)が求められます。



ディラックのδ函数



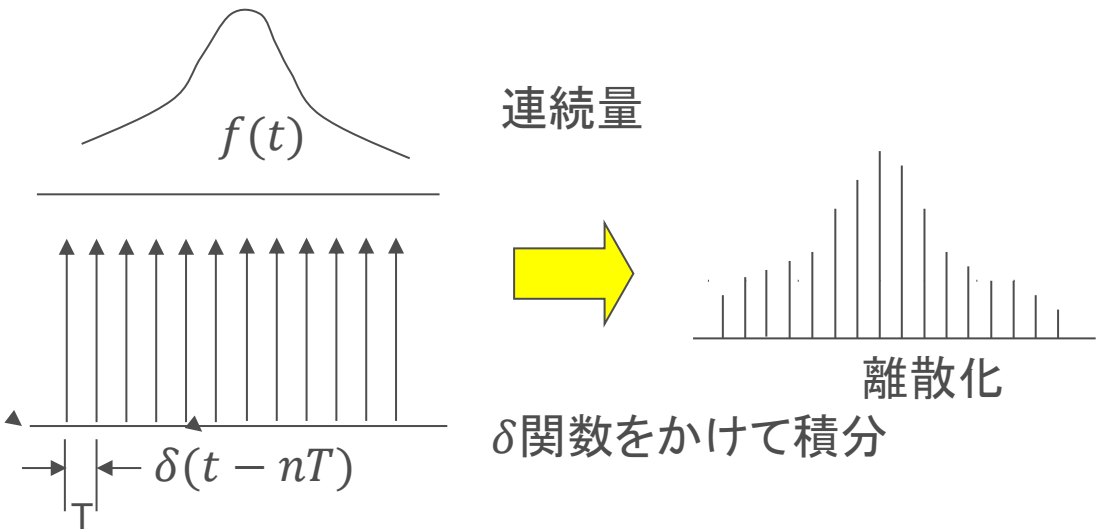
注:この図では、振幅方向はまだ量子化(デジタル化)されていません

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

連続量の離散化

フーリエ変換では、数学的な導出で連続量が前提でしたが、実際の物理現象を数値的に解析し、これを計算処理する場合には、その値は離散量になります。そのため離散量を扱えるように数学的な拡張を行います。

連続変化の関数から、離散値を得るためには、ディラックのデルタ関数を与関数にかけて積分します。ここでδ関数は、時間軸の幅がゼロで振幅が∞ で積分値が1の超関数です。このような信号をインパルスとよびます。(デジタルフィルタの項目で後述します。)



振幅＼時間	連続	離散
連続	アナログ	多値
離散	サンプル値	デジタル

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

ユニットステップ関数

演習2.7.1 直流電源がONする時の信号を図示してみよう

演習2.7.2 δ関数とユニットステップ関数の関係を考察してください。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

正規直交
関数列

積分変換において、フーリエ変換では、核関数に複素正弦関数を用います。複素正弦関数は、正規直交関数列です。

一方、ラプラス変換の核関数は、正規直交関数列ではありません。
σによって、もとの関数を収束させることができますが、
フーリエ変換とは使い方が違ってきます。
テキスト6でLTIシステムとディジタルフィルタでとりあげます。
フーリエ変換の離散化は、離散フーリエ変換になり、円状畳み込み積分(Convolution)になりますが、ラプラス変換の離散化は、Z変換になり、こちらは、LTIの直線状畳み込み積分で扱います。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

フーリエ係数は、正規直交関数列の成分割合である

フーリエ級数は、sin$x$（奇関数）とcos$x$（偶関数）の整数倍角の関数列を核関数として用いて、もとの関数をこの核関数の成分量の比として求めます。
ここで、成分量の比は、そのまま級数の係数になる。これは相関計算です。

関数は、無限次元のベクトルであるから、これは二つの関数のベクトルの内積を求めることになる。ベクトル内積は、成分の行列積だから積分は行列積で求められます。このとき核関数は、正方行列の形。これが後述のTFです。

得られた係数列と核関数の積和は、元の関数を一義的に表しています。
なぜばら核関数列のそれぞれの関数は、いずれも直交しているからです。
このことを一次独立といいます。

この核関数列を見ると、sin$x$, sin2x, sin3x, sin4x….sinm$x$ (奇関数),
cos$x$, cos2x, cos3x, cos4x…..cosn$x$（偶関数） $m = 1.2.3 \ldots . m, n$整数
sin0, cos0 は定数項で周波数0(直流成分)となり、x は基底周波数（もっとも低い周波数）で、この整数倍の周波数の関数列を成しています。これらは直交し、内積はゼロとなり、ノルムが1となる正規性をもっています。

(sinとcosで表現することは、偶奇分解、TF: Twiddle Factor – ひねり因子)

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

関数の直交性

2つの関数$f(x)$と$g(x)$の間に$\int_{x1}^{x2} f(x)g(x) = 0$が成り立つとき、関数$f(x)$と$g(x)$は。区間$[x1, x2]$で直交しているといいます。

関数$f(x)$と関数$g(x)$が直交するということは、ベクトルの内積がゼロ(相関がゼロ)であることが関数でも成り立つということです。これら関数は相互が完全に独立しているということを意味します。3次元の場合、空間ではタテ、ヨコ、タカサが独立した直交関係になっていますね。ですから立体を定義できます。実数軸と虚数軸で構成されるガウス平面に角度を加えた3次元では、複素指数関数を立体的に捉えることができます。

直交性は、N次元に拡張できます。3次元を越えるとイメージしにくくなりますが、タテ、ヨコ、タカサに時間を加えて4次元とする考え方があります。(横道にそれて考えると宇宙論では、10次元や11次元とする理論もあるようです。)

フーリエ変換では、連続量にsinnxとcosnxを同時にかけて積分することで、元の量に含まれるsinnxとcosnxの成分量を算出しています。これはsinnxとcosnxの関数が正規直交関数系をなしていることを利用しています。また三角関数は、オイラーの公式でsinとcosを指数関数でひとまとめ(複素正弦関数)にでき、ネイピア数で計算が容易になります。

本質的に、フーリエ変換のような変換が多くの直交関数系で成り立ちますが、前項の計算上のメリットから、フーリエ変換は圧倒的に有用です。フーリエは、計算の容易な、正規直交系三角関数の整数倍の和で、任意波形が表現できたらすばらしいとひらめいたのかも知れません。

フーリエ変換は、積分変換のひとつで、もとの関数に一次独立の正規直交関数列をかけて積分し、一意に定まる相関関数を得ています。**各自でフーリエ変換の性質**を調べて予習してください。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

フーリエ級数と正規直交系関数1

フーリエ級数は、正規直交系函数の集合$\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x.....$
$\cos nx, \quad \sin x, \sin 2x, \sin 3x.....\sin nx\}$,($x$は自然数)で周期函数を表します。
定数1とcos,定数1とsin, cosとsin, cos同士,sin同士が直交関係であれば、
この集合は直交系函数になります。以下に式で示します。
各関数でノルムを揃え、正規直交系函数列にします。

m, nを自然数として、定数1とcosnx, sinnxをかけて
1周期ぶん積分します。

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin nx \, dx = 0$$

cos関数とsin関数の場合は、
cos(偶関数)とsin(奇関数)の積は奇関数

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0$$ (奇関数のため)

cosnxとsinmxの
直交性の証明1/2

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

フーリエ級数と正規直交系関数2

$\sin nx$ と $\sin mx$ の場合は、$\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ を使って計算します。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j}\right)\left(\frac{e^{jmx} - e^{-jmx}}{2j}\right) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{jnx}e^{jmx} - e^{jnx}e^{-jmx} - e^{-jnx}e^{jmx} + e^{-jnx}e^{-jmx}}{4j^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{(n+m)jx} - e^{(n-m)jx} - e^{-(n-m)jx} + e^{-(n+m)jx}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{(n+m)jx} + e^{-(n+m)jx}}{2} - \frac{e^{(n-m)jx} + e^{-(n-m)jx}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(n+m)x - \cos(n-m)x\right) dx$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(n+m)x}{n+m} - x\right]_{-\pi}^{\pi} & (n = m \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(n+m)x}{n+m} - \dfrac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$\cos nx$ と $\sin mx$ の直交性の証明2/2

演習 2.8.1: 1と1，$\cos nx$ と $\cos mx$ の場合を各自で解いてみてください。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

関数の直交性(補足メモ)

- 直交関数系

$\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t) \ldots\}$

ある関数列(関数の集合)が存在し、
そのうち任意の二つの関数をとり出して、
$T=0$ のときの相関関数の値が

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(t)\phi_j(t) = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2 \ldots i \neq j)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\phi_i(t)\}^2 dt \neq 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

となるとき この関数列を 直交関数系という

2つのベクトルが一次従属であることは、平行ベクトルである。
片方のベクトルの定数倍でもう片方のベクトルを表現できる。
それ以外の場合は一次独立であるという。
2次元平面上の任意の3つのベクトルにおいてすべてが一次独立にならない
2つのベクトルの線形結合で1個のベクトルを表現できる

ベクトル → 行列

正規直交関数系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\phi_i(t)\}^2 dt = 1 \quad (i = 0, 1, 2 \ldots)$$ のときに正規直交関数系という

※実際には $\int_{-\infty}^{\infty}$ ではなく区間を定める

直交関数とは、お互いの内積をとったとき(お互いの相関をとったとき)0になる

同じ内積をとるベクトル空間では、
互いに直交するベクトルを使って任意のベクトルを表わすことができる。

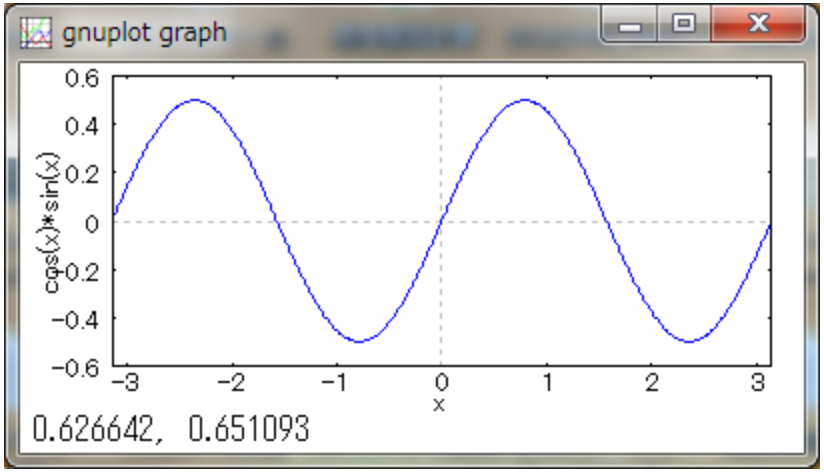
直交関数系の各関数の線形結合で一意的に関数を表わすことができる

直交関数の積の積分

演習 2.8.2 :

以下の直交系関数集合から2関数を選びその積をMaximaを用いて区間$[-\pi, \pi]$でグラフ図示し、考察してください。

$\sin(nx)\,, \cos(mx)$ ……n, m は、正の整数



積分と行列積

連続量としての関数と関数をかけて積分することは、
離散化されると、離散量の行列積の計算となります。

フーリエ変換は、関数(入力信号)と複素正弦関数(核関数)の積分だが、

この離散化は、離散フーリエ変換です。入力信号は、サンプリングされた
入力数列で、複素正弦関数の離散値との行列積を計算します。
ここで注意して欲しいことは、連続量のフーリエ変換は、(周期を$\pm\infty$に拡張して積分するので)非周期関数の積分ですが、離散フーリエ変換では、複素正弦関数（核関数）は、離散値で、角度$2\pi/N$ (N は整数)単位で回転するので、N 乗で元に戻ります。よって周期関数の行列積となります。

離散フーリエ変換は、フーリエ級数と同様に周期関数を対象とする点に注目する。上記のN が整数のため、回転をして元に戻り(周期関数)ます。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

行列と行列積

演習2.9.1：Maxima を使って行列を計算

例題：行列Aと行列Bを定義する、
行列AとBの和をCとする。

```
(%i2) A: matrix(
 [0,1,2],
 [2,1,0]
);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i3) B: matrix(
 [1,1,1],
 [0,0,0]
);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i4) C = A + B;
```

(%o4) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

演習 2.9.2：行列の積を計算してみよう。
検算は、Maximaを使用する。行列Pと
行列Qの積Rは、$R = P.Q$と記述する。
(PピリオドQ)

行列Pは、4行4列で、行列Qは、1行4
列である。値は、以下のとおり。

P	Q
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

(%____)は、Maximaのプロンプトです。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

フーリエ級数化と導出の条件

フーリエ級数展開:
ある関数をフーリエ級数で表すこと

級数を求めることは、係数を求めることになります
係数とは、各周波数(核関数)の振幅(成分比)を意味します
これらは、線スペクトル(数列)です

フーリエ級数化と導出には条件があります
もとの関数が周期関数である点に注意してください

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

フーリエ級数展開の数学

フーリエ級数は、コンピュータで計算する場合、級数の項を増やしていけば、それだけ精度が上がります。同様の性質を持つものにテイラー展開がありますが、こちらは微分を使いますので、不連続点のある関数は展開できません。フーリエ変換では、積分を用いますので不連続点は、ディレクリ条件で収束します。フーリエさんは、結構アバウトに考えてガンガン前進したのですが、お弟子さんらがしっかりと数学的にフォローしてフーリエ変換は実用ツールとして完成しました。

テキスト3ではフーリエ級数の係数導出をしますが、このとき級数式に対項別積分をしますが、積分が成り立つためには、級数が収束しなければいけません。テキスト3では、フーリエさんを見習って級数が収束することを前提に”形式的に”ガンガン前進しますが、級数の収束は、数学的にはかなり厳密な議論が必要ですから、このテキスト2のヒントをもとに各自で勉強を進めてください。とてもおもしろい数学の世界に触れられます。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

フーリエ級数展開できる関数の条件

周期的であり、区分的に連続で、かつなだらかであること(ディリクレ条件)

区分的に連続：関数$f(x)$が、有限個の点を除いて連続で、不連続点において以下の双方の極限値をもつこと。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(z+\varepsilon), \lim_{\varepsilon \to 0} f(z-\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0)$$

区分的になだらか:

関数$f(x)$が連続していて、その$f'(x)$が

その区分で連続しているということを指します。

関数$f(x)$が、ディリクレ条件を満たすとき、フーリエ級数は、すべての点で収束し、不連続点では、以下の値に収束します。

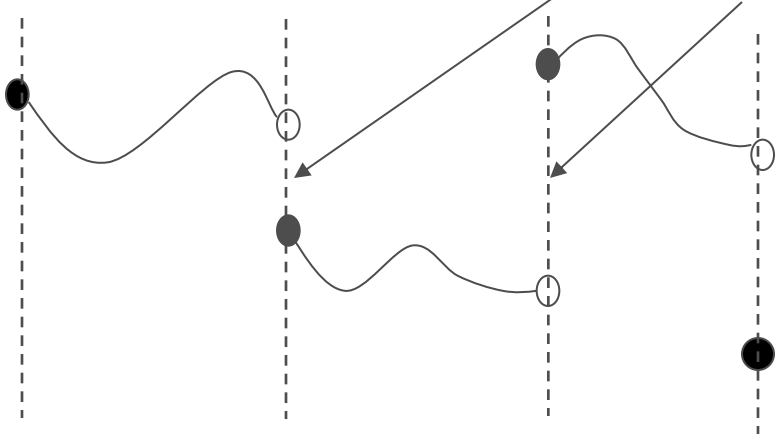
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon \to 0} f(z+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \to 0} f(z-\varepsilon)\right)$$

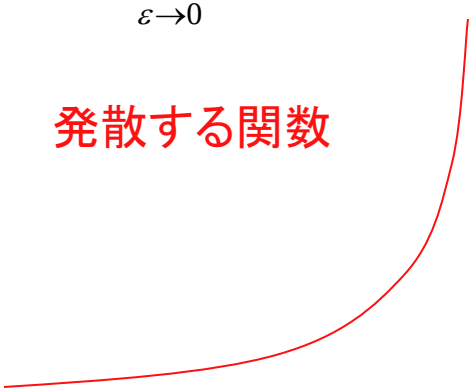
© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

不連続点での収束

非連続な関数

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0} f(z+\varepsilon)+\lim_{\varepsilon\to 0} f(z-\varepsilon)\right)$$





関数は有界であること
(無限大に発散しない)

後述の係数導出のときに定積分するので、関数は積分可能でなければいけません。このとき項別積分を行いますが、項別積分ができるためには、関数が収束しなければいけません。

関数の収束に関しては、以下のサイトなどを参考にしてください。
http://www.maroon.dti.ne.jp/koten-kairo/works/fft/converge9.html
収束には、一様収束と各点収束がありますので、各自でその意味を確認しておいてください。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

項別積分の条件

項別積分可能な条件:

無限級数を項別積分するためには、連続関数級数が一様収束しなければいけません。(微積分と極限の順序交換)

連続関数級数$\sum_{n=1}^{\infty} g_{n(x)}$が一様収束するならば、

$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g(n)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} g(n)$が成り立ちます。

矩形波やのこぎり波は、不連続点やカドカドがあり、これらが問題になります。
またとんがりが急峻になるほど、高次の項、(高い周波数成分)の項をたくさん含み、
多くのスペクトルが立つことになります。(後でデルタ関数で考えます。)
なだらかでない関数は、収束しづらくなります。矩形波やのこぎり波は、
不連続点があり、なだらかではありません。しかし、収束しない関数も
実用上差し支えない範囲内で使用する場合もあります。
後述の矩形波、三角波などのスペクトルを参照してください。
矩形波やのこぎり波はフーリエ級数の無限和として収束するでしょうか。
各自で考察してみましょう。

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

フーリエ級数と数学的厳密性

係数の導出に関しては各自で導出を試みてください。書籍やインターネットで、多くの情報が得られます。多くの場合、紙数の都合から、数学的厳密性をある程度犠牲にした、間引きした説明と計算になっています。
回路設計したものを実際に動作させると、想定外の現象が発生することがあります。
これらの現象は、たいがい数学的な前提条件が外れたときに発生します。
数学的な意味を正しく理解していないと、現場で発生した現象が理解できず解決できないことが多くなります。
数学的な意味を理解しなくても設計はできますが、発生した問題の解析には、
一定の数学的理解が必要になることを理解しておいてください。

前スライドでは、関数の項別積分をフーリエ級数にそのままあてはめていますが、式の計算や展開の過程で、疑問を持つ方もいると思います。無限級数の項別積分には、一様収束が条件となります。矩形波や三角波は、この条件を満たすでしょうか。

級数の積分に関して:
一様収束、項別積分(微分)、
フーリエ級数の各点収束とディリクレ条件
区分的連続と非連続点の収束値
区分的になめらか:導関数が区分的に連続であること
不連続点を持つ関数の級数展開では、部分和は元関数に一様収束しない、これがギブス現象として現れる
関数が区分的になめらかであれば、パーシバルの等式が成り立つが、
これは、級数項を無限に加算した場合にベッセルの不等式が等号化したものである。

講義メモ:

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019

Memo

フォローアップURL

http://mikami.a.la9.jp/meiji/MEIJI.htm

担当講師
三上廉司(みかみれんじ)
Renji_Mikami(at_mark)nifty.com
mikami(at_mark)meiji.ac.jp
http://mikami.a.la9.jp/_edu.htm

© Renji Mikami – Mikami Consulting / Meiji University 2019