

Computer Science A

Hardware Design Exercise Text 1

CS, Physics and Mathematics for Fourier Transform May 9th, 2019

CSAHW Computer Science A, Meiji University

CSA_B3_Text_1.pptx 34 Slides
Renji Mikami

はじめに：講義と実習について

1. 講義と実習の関係

：講義ではその科目を深く掘り下げて、理論的基礎の習得を目的とします。そのため他分野との関連や、学んだことが具体的にどのように役立つかについては、も十分に踏み込みません。実習は多分野の知見を総合して具体的に機能を実現していきます。講義と実習をうまく組み合わせることによって、知識が消化され根付いていきます。

2. 数式や理論の読み解き

：多くの数式と解き方を暗記すればかなりの問題が解けますが、パターン外の問題への応用が難しくなります。理論や数式は多様に読み解くことができ、その中から本質を読み取ることができます。少ない本質から多様に展開、応用ができるようになれば、暗記して詰め込む必要がなくなってきます。

3. 骨組みの理解

：高度で複雑な理論を厳密に証明しながら理解していくには、時間がかかりその途中で迷子になって挫折してしまいます。アバウトな理解で脳内に直感的なイメージを作りながら、先に進み全体の骨組みを先取りして理解してしまいましょう。そうすれば自分の位置関係がわかるので、迷路から脱出することができます。わかったつもりで先にすすむことは、かなり大事なことで恐れてはいけません。厳密さや証明は、全体が見えてからでよいと思いますし、証明のすんだ定理は、そのまま使って先にすすみましょう。(フーリエさんを見習いましょう。)

4. 動かないときがチャンス

：わかったつもりでも、実際に理論を正しく理解していても、実習でシステムとして実装してみると動きません。この想定外の事態が発生したときが、自分の理解を検証し深めていくチャンスです。また、動いたときには、“結果オーライ”として安心せずに、今のどのような条件下で動いているのかを考察してください。実際の開発では、動いてからが勝負です。

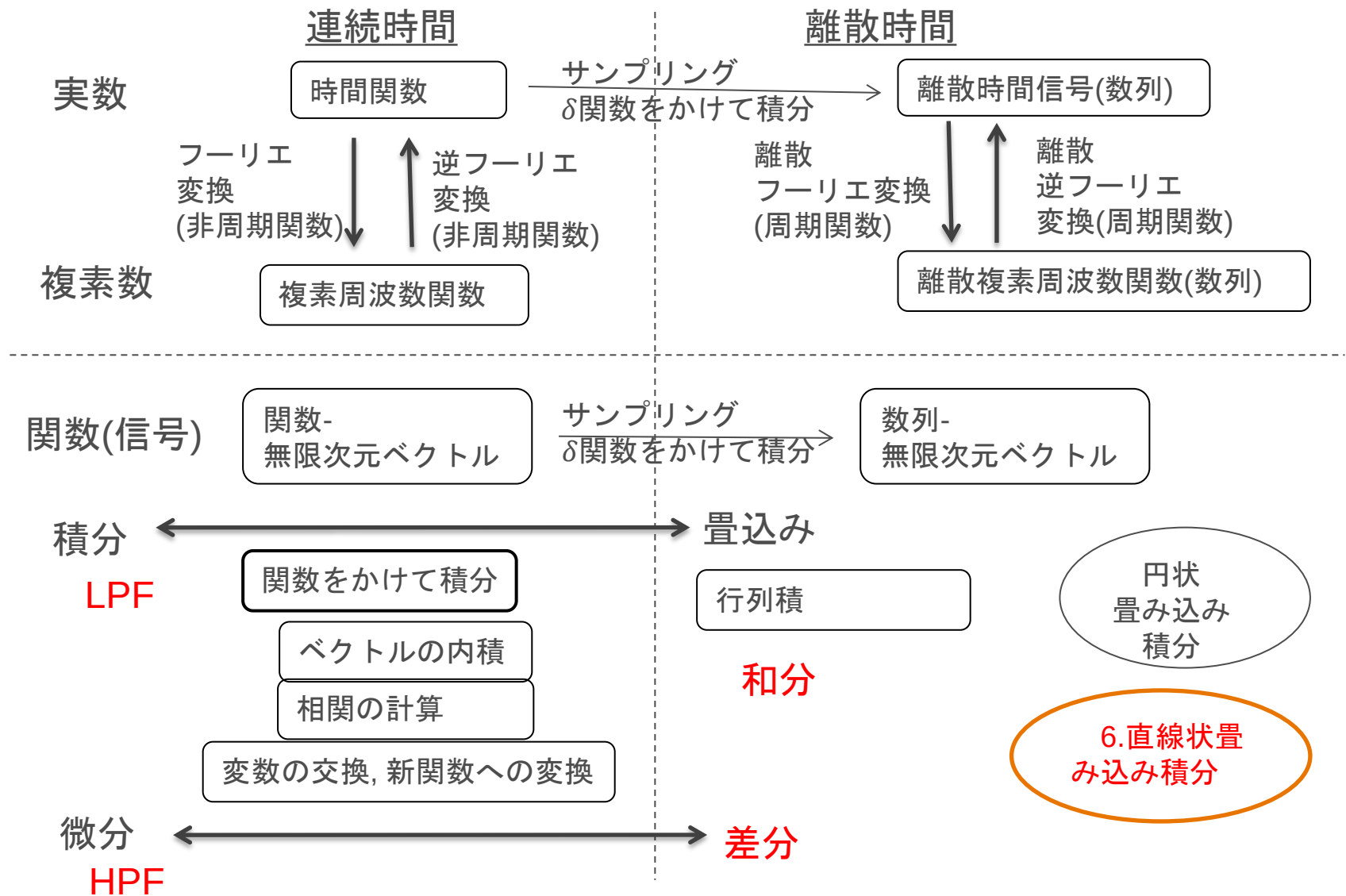
5. 作るからわかる

：実習では、数学、物理学、情報科学、工学の多分野の知識を総動員してターゲット・システムを作って動かします。教わっていないこと、まだ解明されていないこともたくさん含まれます。この過程によって知識の整理と理解が進みます。分からないから作れないのではなく、作るからわかるのです。考えてもわからない場合は、仮説をたて実験し検証します。理論と実験は連結されることによって進展します。

6. フーリエさんはすごくて面白い

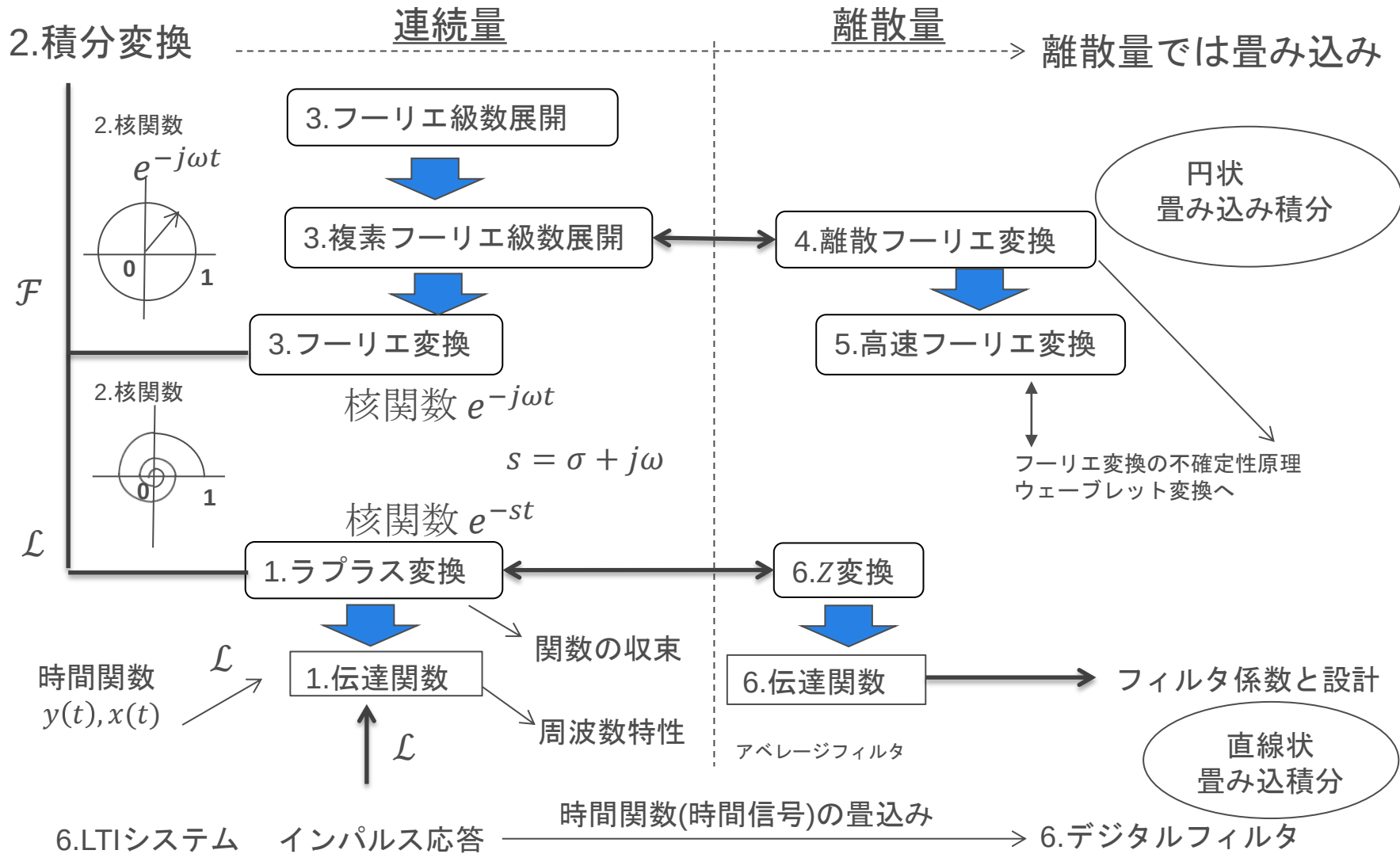
：フーリエさんは尊敬すべきエライ人ですが、“かなり正しくてすごく使える”フーリエの定理を“思いついた”ある種の野蛮さというかアバウトさ-自分は自由に爆走して、お弟子さんらが数学的厳密性の裏づけをしていったというドラマは、実に興味深いものです。その先が今でも進行中です。

冒険マップ：実数,複素数,連続,離散,積分 1



冒険マップ：関数(信号)の変換

2



数字はテキスト番号, $\mathcal{F}$:フーリエ変換, $\mathcal{L}$:ラプラス変換

全体を見渡そう

理学と工学
数学と物理学
コンピュータ・情報科学
連続と離散
波
時間領域と周波数領域

数学と物理学、工学とコンピューター

厳密かつ純粋な論理で構築される数学に対して、物理学は自然界の存在と現象を解明します。そのため理論物理学と実験物理学の二つの面を持ち、前者は理論的な研究を行い、後者はその理論を実験や観測で検証します。数学は、実際に存在しないものでも整合性があれば、自由に拡張し理論にくみ込んでいきます。

物理学は、実験物理の側面から理論を検証しますが、このとき観測と測定作業を行いますから、そこには精度(誤差)が必ずつきまといまいます。これが数学と物理学の違いのひとつになります。

各自で虚数(j , ただし $j^2 = -1$)を例にとって考えてみてください。

工学は、実際に人の役に立つ技術やモノを生み出すための学問ですから、数学や物理の成果の上に成立しますが、数学ほどの厳密性、完全性を求めません。また組成や原理が未解明でも、実用に供するための方法を研究していきます。工学では、合理性、実用性が求められます。

数学、物理学、工学、ともに連続量と離散量を扱いますが、コンピュータによる計算は、近似と離散量で行われます。そのため値を求めるときは、級数を使い近似値を計算します。必要な計算精度に応じて級数の項を増やしていきます。

計算機は、その名のとおり式を解いているのではなく、式の値を計算しているのです。各自で、コンピュータが計算値を求める例をテイラー展開で考えてみてください。

数学、物理学、工学の“用語”

1. 数学では“関数”といいます、工学ではこれを“信号”と置き換えて扱います。本講座も最初は数学から始めますから“関数”を使いますが、実装に近づくにより自然な“信号”を使います。これらは本質的に同じものです。数学の関数 $f(x)$ は、信号 $f(t)$ となります。ここで t が変数となりますが、これは、時間関数であるということを強く意識してください。
2. 物理では、“振動数”や“波長”を使いますが、電気では“周波数”あるいは“角速度、角周波数”を使います。見方や表し方の違いで、これも同じものです。
3. 数学で使われる、微分や積分という語も、電気では、微分回路、積分回路という名前が登場し、LPFやHPFがこれに対応します。関数は一般的には連続量ですが、連続量は、サンプリングによって離散値となります。この講義では、情報科学科なので、離散量を主体的に取り上げていきます。今日の応用もほとんどが離散量です。
4. 視点を量子的にすると、エネルギー(=物質)の素量(最小の単位量)が存在し、さらにプランク時間を導入すると、連続量連続時間と看做されていたものはすべて、“デジタル的”であるといえるかもしれません。

(注)関数と函数は同じです,function。

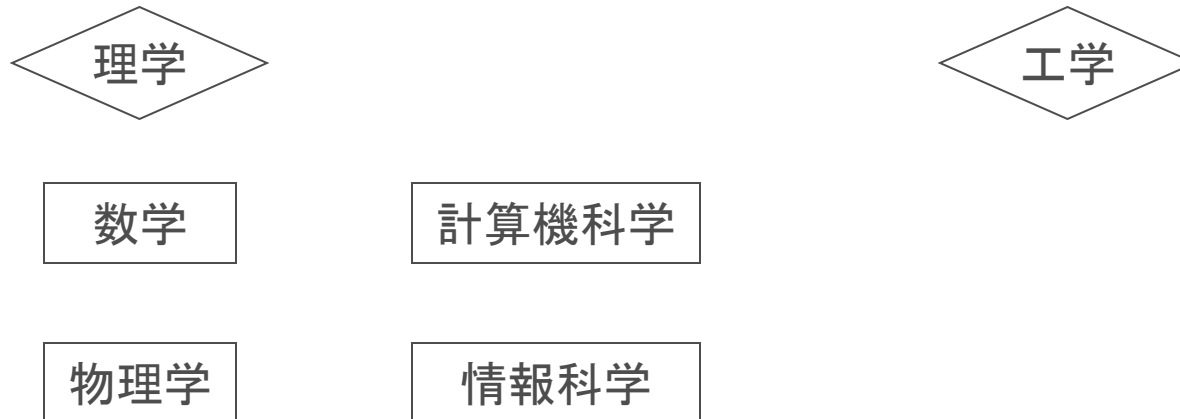
LPF(Low Pass Filter) 低周波通過フィルタ、HPFは、High Pass Filter

数学、物理学、工学の関係

演習:板書参照-各自で関連を図示、設問に答えよ

(最初から検索したりせず、まず自分の頭でイメージを浮かべてください。)

科学



設問:数学と物理学の違いを述べよ 情報科学はどこに位置するか

設問:理学と工学の違いを述べよ

時間から周波数へ、連続から離散へ

波や波形をグラフ化するとき、縦方向に振幅、横方向に時間軸をとりますが、これは波を時間の関数として扱っています。

フーリエ変換では、この時間領域から周波数領域へと移行します。時間関数としての波形は、パターンとしての”識別”が困難ですが、周波数関数に変換すると、周波数とそのパワースペクトルの量という数値で、定量的な解析が可能になります。これは大きなメリットです。

このような周波数関数は、時間 t の関数ではありませんから、”時間から自由”です。このために、フーリエ級数展開では、周期関数(同じ波形を繰り返す)を前提にして、時間からの自由を獲得します。さらにフーリエ変換では、この周期を $\pm\infty$ に拡張することで、非周期関数への拡張を行います。

信号(関数)をサンプリング(δ 関数をかけて積分)すると、離散値が得られます。離散フーリエ変換では、この離散値(数列)をフーリエ変換します。実際の回路では、さらに振幅方向を量子化し”デジタル”信号として処理します。

(注: 離散化は時間軸方向で、量子化は振幅方向になります。)

連続と離散、アナログとデジタル

時間 \ 振幅	連続	離散
連続	アナログ	多値
離散	サンプル値	デジタル

連続と離散には、時間と振幅の2つの側面があります。

デジタル化では、時間方向には、サンプリングを行いますが、振幅方向には、量子化を行っています。

AD変換では、サンプリング周波数と量子化ビットがこれに対応します。

44.1KHzサンプリング,16bit量子化の意味を考えてください。

最大実用周波数は？ MSB/LSBの比は何dBになるのでしょうか？

波

水面の波

小石を池に投じると水面に波が発生します。このとき周辺に広がっていく波は、横波です。媒質としての水面の水は、移動していません。上下に振動する波が時間とともに伝播する横波です。これに対し縦波がありますが、弾性波は縦波です。
(津波は、横波を含んだ複雑な弾性波として高速に伝播します。)

波(自然現象から)

音波、水面の波、地震波、電磁波など

時間とともに連続的な変化が空間を伝播する**事象**(ことがら,現象)でありモノ(実体)とはちがいます。

この変化を伝える媒体となるものを**媒質**といいます。

音波は、気体、液体、固体などを媒質として伝播します。

空気中では弾性波として空気の密度の高低(疎密波)を持つ**縦波**です。

真空中では、媒質が存在しませんから音波は発生しません。

空気中での音波の伝播速度は、音速: c , t :摂氏温度で

$$c = 331.5 + 0.5t \text{ (m/sec) となります}$$

音速は密度の高い媒質を伝播するときには高速になり、

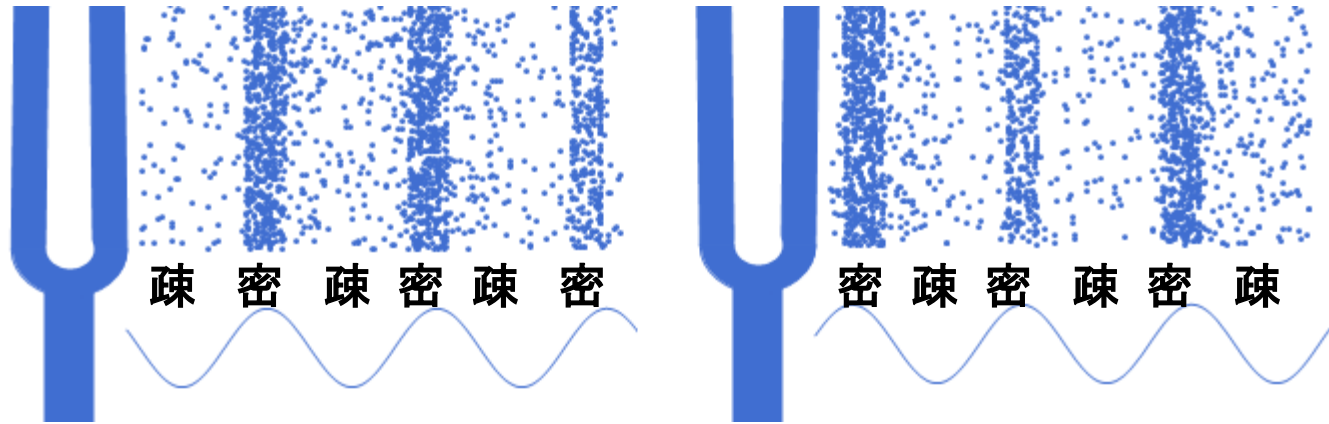
固体中では、横波が遅れて伝播します。

(波の進行方向と同じ方向に変化するものを縦波、これと直角に変化するものを**横波**としています。)

地震波のP波(Primary Wave)は、疎密波であり弾性波(Compression wave)の縦波で、S波(Secondly wave)は、横波として、遅れて伝播してきます。地下核実験の場合は、弾性波が特徴的になります。

波(縦波と横波)

空気中を伝播する音波は、疎密波(縦波)です。



この事象は、時間とともに変化するので、横軸は時間軸となり、波は**時間関数**として表されます。波の**周期性**は重要な波の性質となります。(関数の周期性は非常に重要な性質です。)

測定器などでは、横波のように表示されますが、上下の振幅の大小は、疎密の程度を表現しています。

<http://demonstrations.wolfram.com/TuningFork/>

波の表現(時間軸と周波数軸)

波を表現する場合一般的には、横軸に時間を取り縦軸に振幅を取り、“波形”として表現します。

時間軸上で周期的に繰り返す波形は、周波数軸上のスペクトルとしてその成分を観察することができます。

たとえば、複数の異なる周波数のサイン波が合成された波形は、時間軸上では複合された波形となり、その特徴が“図形的なパターン”となり特徴の抽出が難しくなりますが、周波数領域で表現すれば、周波数と振幅の2点でスペクトル表現され、定量的な解析が容易になります。

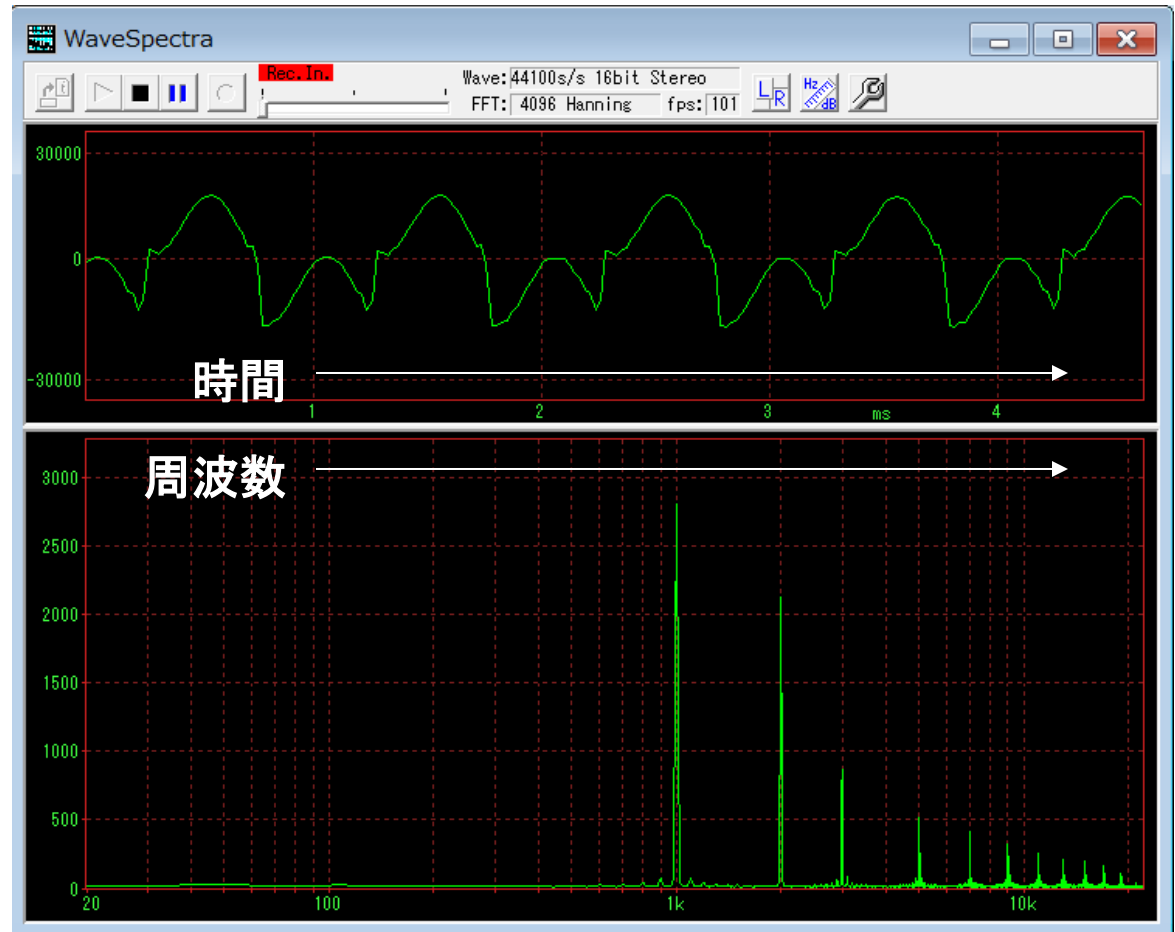
フーリエ変換は関数(信号)を、時間領域から周波数領域へ変換します。1次の波から平面(2次)に拡張することにより、画像データの解析や処理が可能になります。このように平面(2次)、立体(3次)、N次元ベクトルへと拡張して定量的な解析ができます。

波の表現(時間軸と周波数軸 WS-WG)

時間軸表現の波
(周期波形-
繰り返し波形で
あることに着目)

同じ波の周波数軸
(スペクトラム)表現
波長軸表現も同様
周波数成分量として
解析できます。

WG:WaveGen
WS:WaveSpectra



時間軸上で繰り返す周期波形であれば、時間概念から離れて観察することができます。フーリエ変換は時間軸から周波数軸への変換を行ないます。

時間領域から 周波数領域へ

フーリエ級数展開と離散フーリエ変換は、**周期関数**を対象としています。
複素フーリエ級数展開では、計算が容易な複素数領域に拡張します。
複素数と**周期化**と**離散化**がポイント、離散化は本質的に周期化と見れます。
(離散化した周期関数なので、コンピュータで計算できる.>テキスト3.4のテーマ)
複素フーリエ級数展開から、離散フーリエ級数を導出するのが近道です。

フーリエさん



ジャン・バティスト・ジョゼフ・フーリエ
(Jean Baptiste Joseph
Fourier, 1768-1830) フランス

写真引用: Wikipedia

フーリエのアイデアは、任意の関数を三角関数の級数として表すことができる(フーリエの定理)というものです。発表時点では、フーリエ級数化が可能である条件や非周期関数への応用などの数学的証明や展開が十分とはいえませんでした。多くの数学者によって研究、拡張され、今日では非常に強力な数学、物理学、工学ツールとなっています。

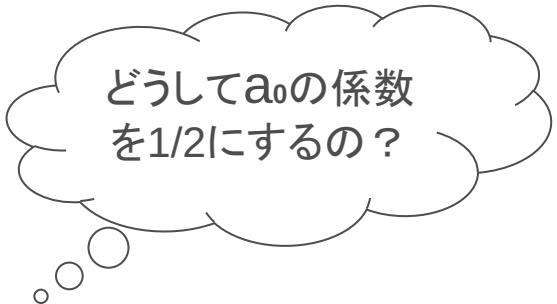
数学的、厳密な導出は、長く複雑な計算を要しますが、実装解では標準化された離散フーリエ変換として解かれます。さらに膨大な計算量も高速フーリエ変換アルゴリズムにより、計算量を劇的に削減できることから、コンピュータ処理に適し、広く実用化されています。

フーリエ級数式

$$\begin{aligned} f(x) = & a_0 \cos x \\ & + a_1 \cos x + b_1 \sin x \\ & + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x \\ & + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x \dots\dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{aligned}$$

x は、最も低い周波数で基底(基本)波といいます。
他の項には、すべて基底波の整数倍の波が現れ、
これらを高調波といいます。

a_0 を $\frac{1}{2}a_0$ と置き直してまとめ(1)式を得ます。



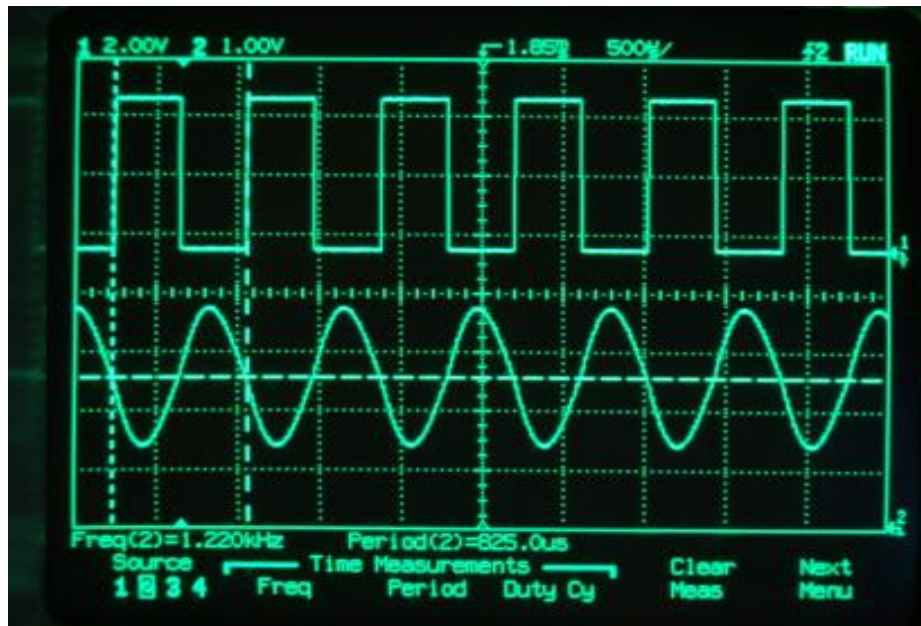
どうして a_0 の係数
を $1/2$ にするの？

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \dots\dots (1)$$

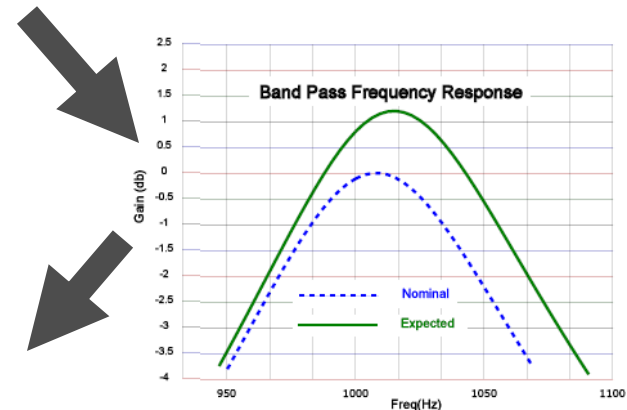
$\frac{1}{2}a_0$ は、定数項(直流成分)、 $\frac{1}{2}$ はノルムが倍のため、係数合わせ
 $f(x)$ は、級数のため非連続値です。

矩形波からサイン波を取りだす

1KHzの矩形波を1KHzのバンドパスフィルターに通すと
1KHzのサイン波が現れる (B2演習から)

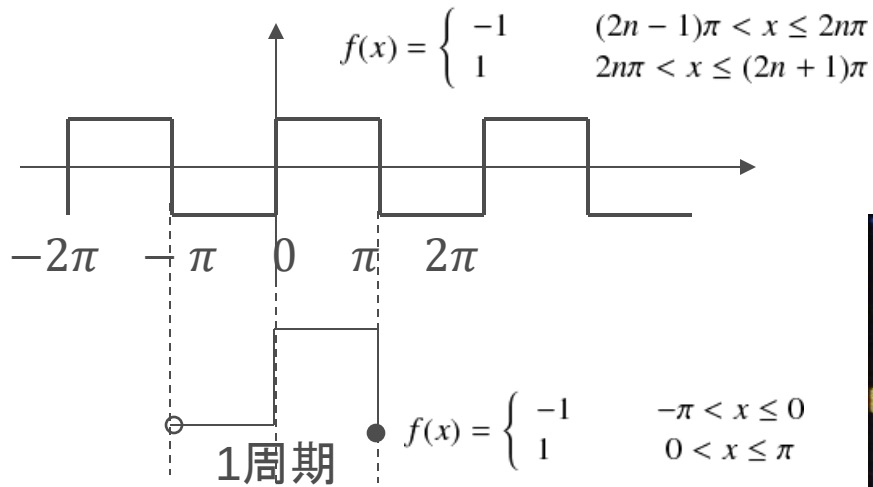


Band Pass Filter



1KHzの矩形波には、1KHzのサイン波成分が含まれていることがわかります。では1KHzのサイン波にどのような波を重ね合わせたら矩形波が合成できるでしょうか？

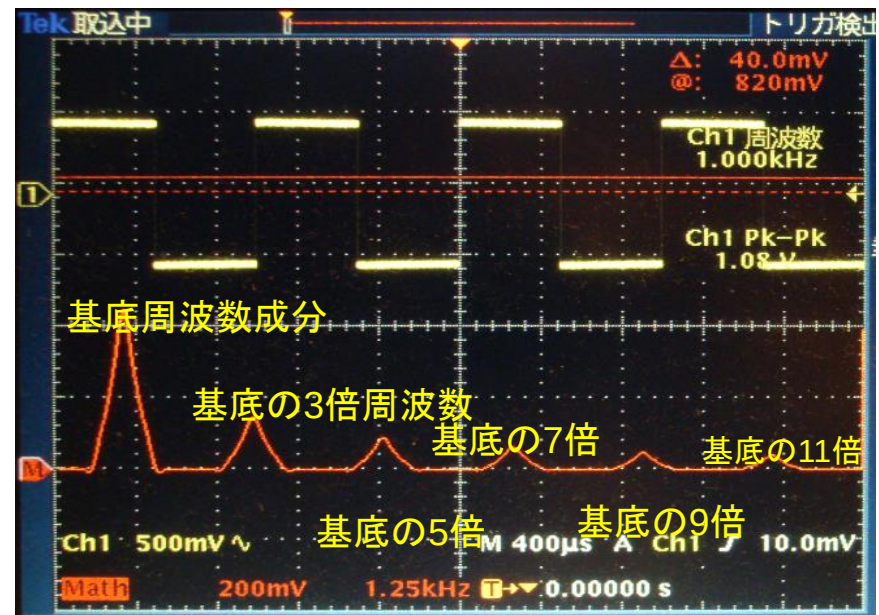
矩形波をオシロ/FFTアナライザで観測する



$$f(x) = \frac{\pi}{4} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x \dots \right)$$

フーリエ級数展開は、テキスト2
数学編で解説します。

上は、矩形波の時間軸波形(横軸は時間)
下は、スペクトル(振幅はRMS)(横軸は周波数)



基底波を1KHzとすると
1KHz, 3KHz, 5KHz, 7KHz

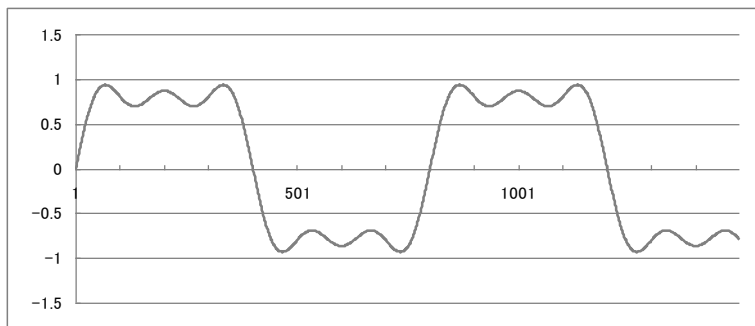
なぜcosの項が現れないの
でしょうか？

演習 1.1 : WG > WSで信号の発生と波形の観測

WGで1KHzの矩形波を発生させる。これをWSで観測し、時間軸波形と周波数軸表示を行う、スピーカーを接続して、矩形波とサイン波の音の違いを確認し各自のイメージをメモしてください。続いて、三角波、のこぎり波を発生させ、波形とスペクトルを観測してください。
WG:WaveGen WS:WaveSpctra

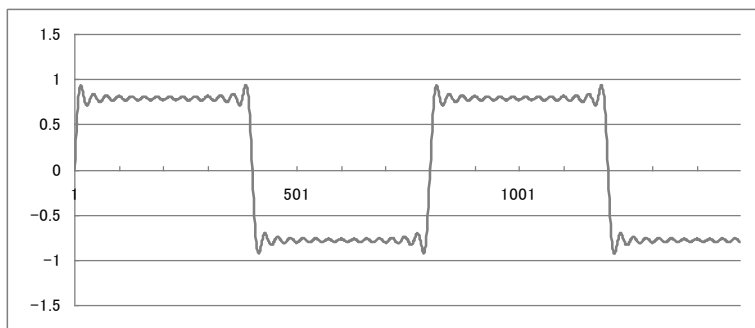
演習1.1.1 観測結果を考察としてまとめてください。

演習1.2:N次のsin波の合成による矩形波生成



5次:

$$\dots\dots + 1/5(\sin 5x)$$



27次:

$$\dots\dots + 1/27(\sin 27x)$$

演習1.2.1 Maxima(Excelでもよい)で、15次の場合の矩形化波形を作成してください。

注意:ここで作成したグラフは、級数全体の一部を加算しています。
矩形波にするには、無限次の加算を行うので、実際には不可能です。
後述のフーリエ級数の収束条件である”区分的になめらかである”
条件に合致しないと収束しません。

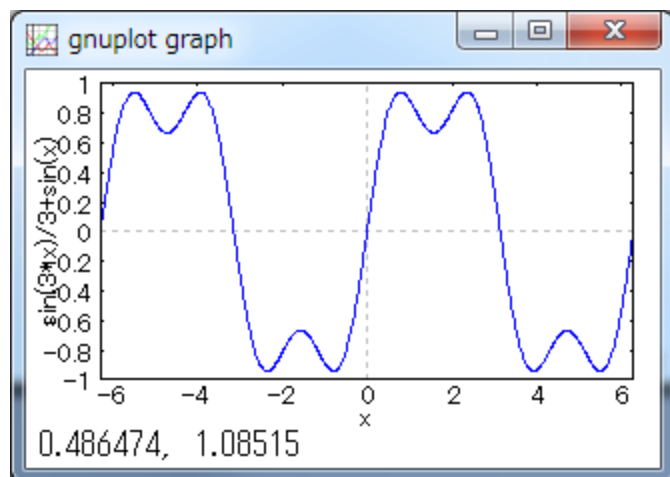


SIN_5.xlsx

Maxima での計算例(3次の場合)

```
(%i5) plot2d(sin(x) + (1/3) * sin(3 * x), [x, -2 * %pi, 2 * %pi]);
```

(%i5) 行のプロンプト



説明

plot2d 2次元プロット表示

sin(x) *sin* 関数 *x*はラジアン

[変数と値の区間]

[*x*, *x*の始め, *x*の終わり]

$-2 * \%pi$ は -2π

$2 * \%pi$ は 2π

Wxmaximaの場合は、enter は shift+enter で操作してください。

演習1.2.2 N次の場合を各自でプロットしてください。

(Nは任意の正整数)

演習1.2.3 *cos*の場合をプロットし、考察を述べてください。

フーリエ級数からFFTまで

フーリエ級数(展開): ある関数をフーリエ級数(実数域)で表すこと
フーリエ級数化の条件: **周期**的関数であること
収束条件: **区分的になめらか**、**連続**であること

周期

実数
(数列)

複素フーリエ級数(展開): フーリエ級数を**複素数に拡張**したものの
線スペクトルが得られる

周期

複素数

フーリエ変換: **非周期**的関数対応に**拡張**したもの
関数化(連続量) 可積分な時間関数を変換可能

非周期

複素数

離散フーリエ変換(DFT - Discrete Fourier Transform)
フーリエ変換を**離散量に対応**させた変換
(注: **周期**関数を前提にします)

周期

複素数

高速フーリエ変換(FFT - Fast Fourier Transform)
離散フーリエ変換の計算を**高速実行するアルゴリズム**

周期

複素数

演習1.3.1 何故**複素数**に拡張するのか、何故**周期**関数で扱うのか考察してください。

ラプラス変換

ピエール＝シモン・ラプラス
(Pierre-Simon Laplace)
1749-1827 フランス



フーリエ変換の式の形 $f(x)e^{-j\omega t}$
ラプラス変換の式の形 $f(x)e^{-st}$ ($s \triangleq \sigma + j\omega$)

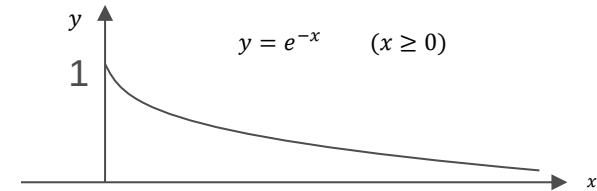
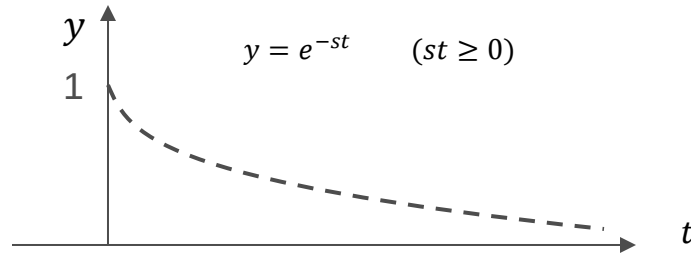
どちらもネイピア数を使った式で、複素関数に拡張します。 写真引用:
ラプラス変換は、発散しやすい関数を収束させます。 Wikipedia

また、実数領域では求解困難な式が、複素数領域では容易に解けます。
フーリエ変換は、式の形からは単位円上の複素正弦関数をかけるラプラス変換とも見えます。(両者は本質的には違うものですが.....)

離散群上での片側ラプラス変換はZ変換になります。DFT演習では、LPF (ローパスフィルタ)を使いますが、デジタルフィルタは、線形時不変(LTI)システムの性質を使います。この積和演算は、直線状畳み込み積分となります。テキスト6で扱います。

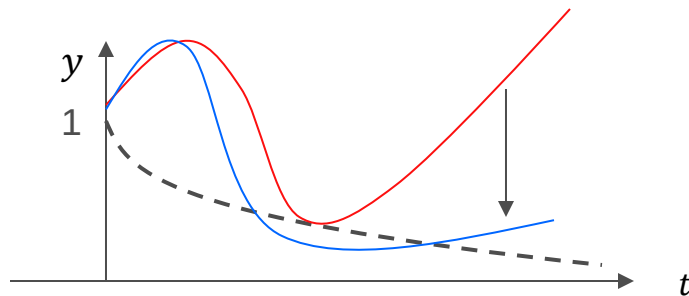
ラプラス先生は、19歳年下のフーリエさん1768-1830の最初のフーリエの定理の論文を却下.....

ラプラス変換



急峻に収束する関数を核関数に選択することによって圧縮を行う

積分変換では、核関数は2変数関数なので、 $x = st$ と置きます。
この核関数を**もとの関数**にかけると結果 **y** が**”圧縮”**されます。
続いて、 t で0から ∞ まで定積分して、 t を消してしまうと、収束する **s** の関数が得られます。(積分変換と核関数は、テキスト2参照)



どのような場合でも収束する関数が得られるとは限りません。この場合、ラプラス変換が存在しなくなります。(注:この図は実数領域で説明していますが、実際は、 **s** は複素数です。)

フーリエ変換では、核関数に複素正弦関数を用います。複素正弦関数によって、正規直交関数の $\sin, \cos$ をひとつにまとめることができます。

フーリエ変換とラプラス変換

演習1.4.1: $s = \sigma + j\omega$ と置いて、フーリエ変換とラプラス変換の違いを考察してください

演習1.4.2 ガウス平面に直交する時間軸を加え、グラフを書いてみる。(Maximaで3Dグラフのプロットをさせてください-任意)

まだピンとこなくてもいいです。先にすすむとだんだんわかってきます。

代表的な関数のラプラス変換

演習1.5.1(オプション) 関数を図示してください。
続いてラプラス変換してください。maximaを使用してもいいです。

1.ディラックのデルタ関数 $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

2.ユニットステップ関数 $Us(t)$:

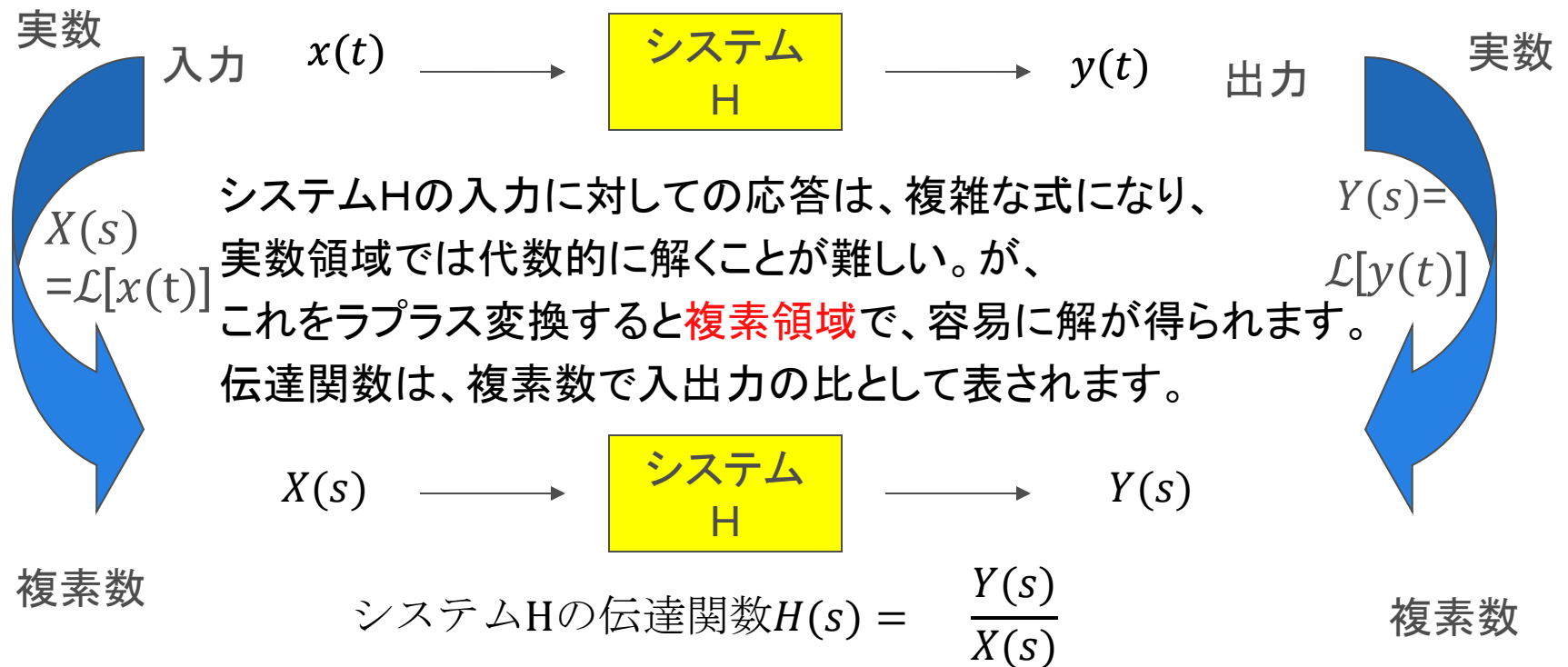
$$Us(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

3.ランプ関数 $f(t) = t, (t \geq 0)$

4.正弦($\sin$)関数 $f(t) = \sin(\omega t)$

5.矩形関数 $R_{-a,a}(t) = \begin{cases} 1, & -a < t < a \\ otherwise \end{cases}$

ラプラス変換の有用性-伝達関数



実数領域では、解けない問題も複素領域では、解けるようになります。
これは複素数の正則性の性質によります。フーリエ変換も複素領域を使用します。
伝達関数はテキスト6.LTIシステムで扱います。ここでは、複素領域で解くことに着目

$\mathcal{L}$:ラプラス変換, $\mathcal{F}$:フーリエ変換, t は時間(実数), s は複素数であることに注意
ここで $x(t), y(t)$ は連続時間信号、離散時間信号の場合 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{Z}$ 変換を使用。(テキスト6)

テキスト6(デジタルフィルタ)への展開

システムHの特性は、伝達関数で把握できますがポイントを3つ覚えておいてください。(フィルター実装ツールで使います。)

1.安定性

入力によって出力関数(信号)が、収束、振動、発散するかを見ます。

2.極(ポール)

伝達関数の分母がゼロになる点です。

3.零点

伝達関数の分子がゼロになる点です。

ここでは、連続量が対象のため、ラプラス変換を使いました。テキスト6では、離散量を対象にしたデジタルフィルタを実装します。

そのため離散量対応の、Z変換を用います。

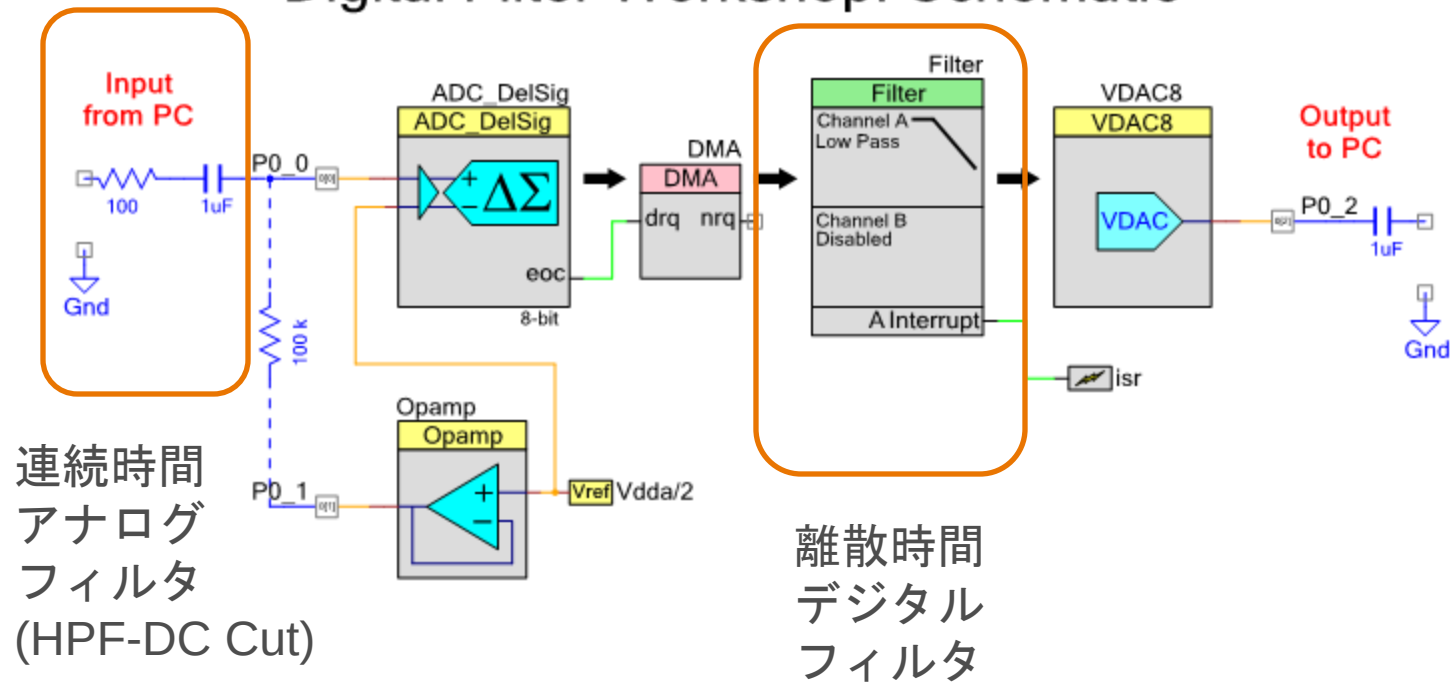
フィルタの特性は、伝達関数で容易に記述することができます。そこで所望のフィルタ特性を伝達関数で求めこれを逆Z変換して、時間関数(時間信号)として実装することができます。

テキスト2から5まで、しばしラプラスの世界を離れてフーリエ変換に進みます。テキスト6で再会しましょう。

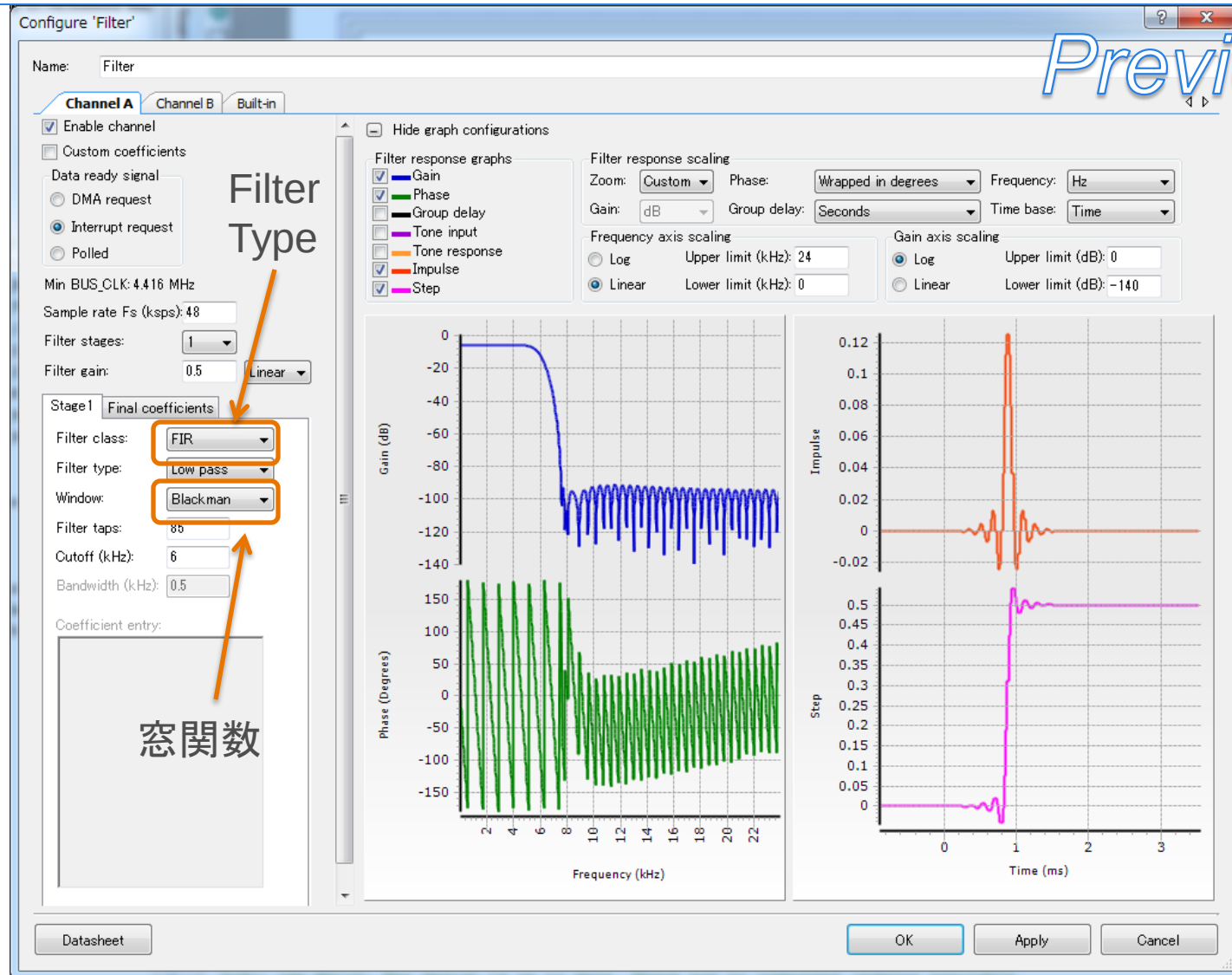
テキスト6の演習例 Digital Filter

Preview

Digital Filter Workshop: Schematic

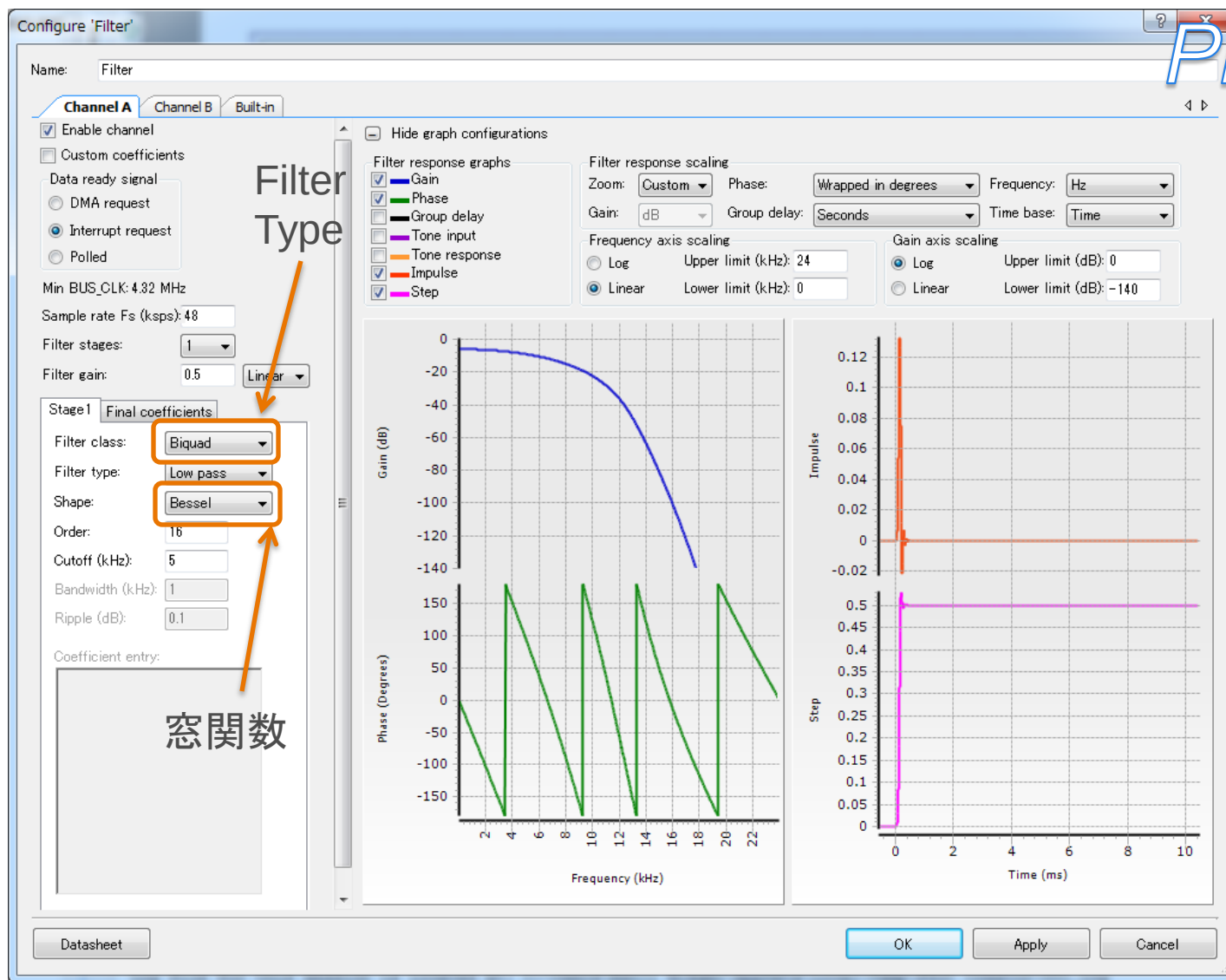


Digital Filter の特性 - 一段FIR



Filterはツールで容易に作れます。ツールを使いこなす”知識”が必要です。

双二次フィルタの特性 – IIR Filter



Biquad
(双二次)
フィルタは、
伝達関数の
分子に
零点が2つ
分母に
極が2つ
ある
フィルタで
す。

Memo

フォローアップURL

<http://mikami.a.la9.jp/meiji/MEIJI.htm>

担当講師

三上 廉司(みかみれんじ)

Renji_Mikami(at_mark)nifty.com

mikami(at_mark)meiji.ac.jp

http://mikami.a.la9.jp/_edu.htm

