

Computer Science A

Hardware Design Exercise 3

Handout V2.02 December 13th, 2021

CSAHW Computer Science A, Meiji University

CSA_B3_EX3.pptx 23 Slides
Renji Mikami

CSAHW3 ハード演習内容

3.1 フーリエ級数式と係数式

3.2 複素フーリエ級数と係数

3.3 核関数

3.4 タイトル

サブタイトル

その他

3.1 フーリエ級数式と係数式

3.1.1 フーリエ級数について

- もとの関数は周期関数であること
- $\cos nx$, $\sin nx$ は直交関数列
- フーリエ級数を求めることは係数(相関)を求めること

3.1.2 フーリエ級数式

3.1.3 フーリエ係数式(実数)

- 係数は、もとの関数(信号)に $\cos nx$, $\sin nx$ をかけて一周期積分して相関を求めたもの

3.1.4 Reserved

3.1.1 フーリエ級数について

フーリエの定理(最初期)

“任意の関数は整数倍角の三角関数の比で表せる”

ここでは

もとの関数は連続で微分可能な周期関数とします。

この関数の基本周期を基底周波数とします。

この基底周波数に対応する $\cos x$ と $\sin x$ をもとに

整数倍の $\cos nx$, $\sin nx$ を使ってそれぞれに相関を
計算すると係数が求まります。

相関は、核関数ともとの関数をかけて1周期積分します

また核関数となる $\cos nx$, $\sin nx$ は直交関数列です。

よってフーリエ級数は一意に定まります。

3.1.2 フーリエ級数式 (テキストから)

$$\begin{aligned} f(x) = & a_0 \\ & + a_1 \cos x + b_1 \sin x \\ & + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x \\ & + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x \dots\dots + a_n \cos nx \\ & + b_n \sin nx \end{aligned}$$

x は、最も低い周波数で基底(基本)波といいます。

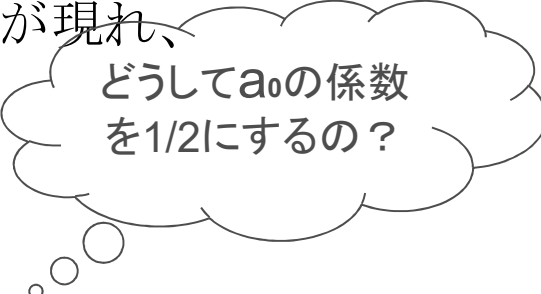
他の項には、すべて基底波の整数倍の波が現れ、これらを高調波といいます。

a_0 を $\frac{1}{2}a_0$ と置き直してまとめ(1)式を得ます。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \dots\dots (1)$$

$\frac{1}{2}a_0$ は、定数項(直流成分)、 $\frac{1}{2}$ はノルムが倍のため、係数合わせ

$f(x)$ は、級数のため非連続値です。



どうして a_0 の係数を $1/2$ にするの？

3.1.3 フーリエ係数式(実数)

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \dots\dots(1)$$

EX313

フーリエ係数式(4) (5) を読み解いてください.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \dots\dots\dots(3)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \dots\dots(4)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \dots\dots(5)$$

一周期 $[-\pi, \pi]$ で積分

係数が、もとの関数と
 $\sin(x)$ と $\cos(x)$ の相関の計
算になっていることに着目
してください。
これが本質です。

3.1.4 Reserved

Intentionally left blank

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \dots\dots (1)$$

3.2 複素フーリエ級数と係数

3.2.1 オイラーの公式とド・モアブルの定理

3.2.2 複素フーリエ級数

3.2.3 複素フーリエ係数

3.2.4 実複素数/級係数のまとめ

3.2.1 オイラーの公式とド・モアブルの定理

オイラーの公式

-テキスト2から

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$$

フーリエ級数式の $\cos nx, \sin nx$ の項は
オイラーの公式で表せます。
このとき n が整数の場合は、
ド・モアブルの定理が成り立ちます。
これによって n 乗問題が n 倍角問題で
解けることになります。

ド・モアブルの定理(n は整数)

$$(\cos x + j \sin x)^n = \cos nx + j \sin nx$$

$$(e^{jx})^n = e^{jnx}$$

3.2.2 複素フーリエ級数-テキスト3から

フーリエ級数式のcos,sinの項は
オイラーの公式で表せますので
代入して計算して複素形式の
フーリエ級数に変形できます。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{式を}$$

オイラーの公式から複素形式に書き直して整理

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n (e^{jnx} + e^{-jnx}) - jb_n (e^{jnx} - e^{-jnx}))$$

計算を続け...(テキスト3参照)

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} ((a_n - jb_n)e^{jnx})$$

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad \text{と置きなおすし}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnx} \dots\dots\dots(6) \quad (\text{但し } c_{-n} = \bar{c} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n))$$

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x \quad \text{から}$$

$$\cos nx = \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j}$$

考察322

(6)式の e^{jnx} 項は
何を表しているか

3.2.3 複素フーリエ係数 -テキスト3から

係数を求めると

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (4), \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (5)より$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx - j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx - j \sin kx) dx \quad \text{ド・モアブルの定理から} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jkx} dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \dots (7) \end{aligned}$$

考察323

(7)式を読み解いてください。

3.2.4 実複素数/級係数のまとめ

まとめるとこうなります．以降DFTは(7)'式を使います

	実数	複素数
級数式	$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \dots (1)$	$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} ((a_n - jb_n)e^{jnx})$ $c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad \text{として}$ $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnx} \dots (6)' \quad (\text{但し } c_{-n} = \bar{c} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n))$
係数式	$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \dots \dots \dots (3)$ $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \dots \dots (4)$ $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \dots \dots (5)$	複素係数項 $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jkx} f(x) dx \dots (7)'$

3.2.5 相関計算のまとめ

	信号＝関数	＝ベクトル	＝行列
相関の計算	二関数をかけて積分	内積の計算	行列積

離散フーリエ変換は、離散量で計算する。
この計算は行列で行う。(だから行列まで拡張してきた)
DFTの核関数は複素数になる

K : 核関数	X : もとの関数	成分比 (内積)
1変数関数 $\langle K $	$ X\rangle$	$\langle K X\rangle$

積分変換 二変数を持つ核関数

$$G(\nu) = (TX)(\nu) = \int_{t_1}^{t_2} K(\nu, t)X(t)dt$$

3.3 核関数

3.3.1 積分から行列積形へ

- cos と sin の係数を exp でひとつにまとめ行列積形へ

3.3.2 核関数の時間関数化

- 円弧の長さの関数を時間関数に変換する

3.3.3 核関数の離散化

- ひねり係数(Twiddle Factor)

3.3.4 核関数を視覚的にイメージする

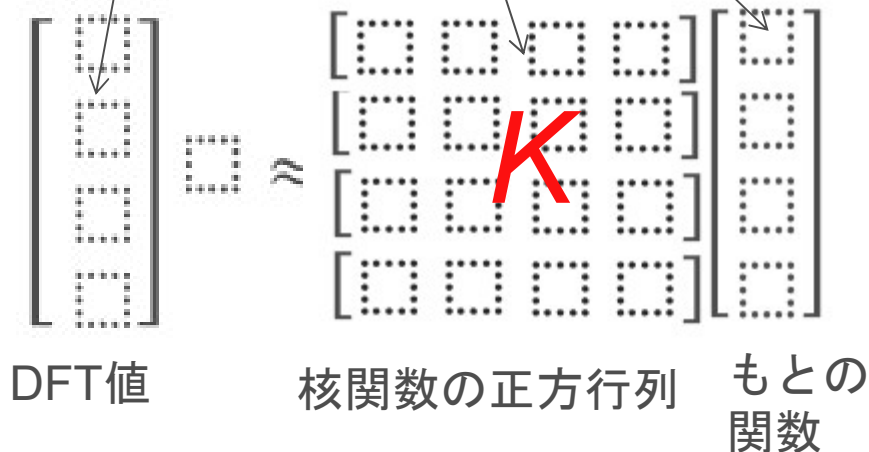
3.3.5 Reserved

3.3.1 積分から行列積形へ

複素フーリエ級数の係数式(7)'は、離散フーリエ変換(DFT)では、離散値の行列積で計算します。矢印のように対応させていきます。

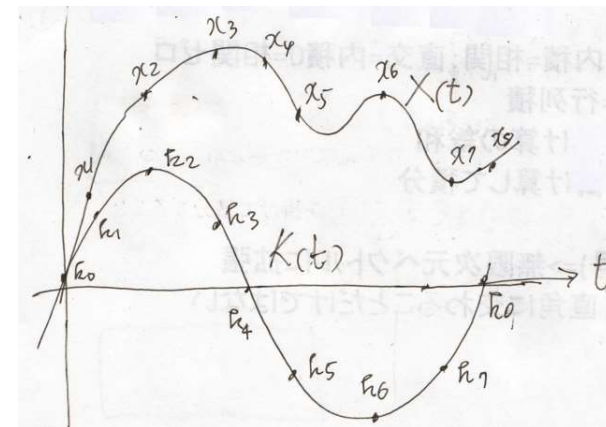
複素係数項

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jkx} f(x) dx \dots (7)'$$



EX331

各行は何を意味しているか
核関数は何故正方行列に
なっているのか？



上の説明図 $k(t)$ ではsinのみ表示、
8ポイントですが、左の行列では
簡単のために4ポイントで説明。

3.3.2 核関数の時間関数化

核関数 e^{-jkx} (円弧の長さ x の関数)を
時間 t の関数に変換します。

EX332

e^{-jkx} を時間関数に変換してください。

$x = \omega t$, ω : 角周波数、角振動数

$\omega = 2\pi f$, f : 周波数、振動数、

$T = \frac{1}{f}$, T : 周期と代入してください

最終的に e, j, π, k, T, t の式にします。

できたら式を読み解いてみてください。

どうして T が必要か？ k の意味は？

これまでは、簡単のために
変数 x (円弧の長さ)を使用し
てきました。

FTは時間関数を周波数関
数に変換しますから、もとの
関数から時間変数を引っ張
り出します。

3.3.3 核関数の離散化

e^{-jk} を時間関数に変換すると
 $e^{-j2\pi\frac{1}{T}kt}$ となります。よって

時間関数の複素フーリエ係数式は、

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^T e^{-j2\pi\frac{1}{T}kt} f(t) dt \dots (8)'$$

また離散フーリエ係数式は、

$$D(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(e^{-j2\pi\frac{1}{M}kn} X(n) \right) \dots (18)'$$

となります

これで離散フーリエ変換(DFT)と
 高速フーリエ変換(FFT)の準備が
 できました。

考察333

(8)'式と(18)'式を比較して

読み解いてください。

8式の積分は、0->T 一周期です

18式のMは、単位円をM分割した数です

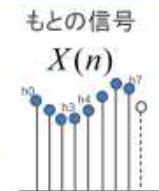
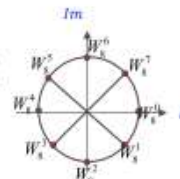
ヒントが2.7.2/2.7,4 の図にあります

2.7.4 DFTの核関数-テキスト4から抜粋

かける核関数(TF)の行は
 基底周波数の整数倍の
 周波数になっている。
 元の信号Xに含まれる各
 周波数成分との相関をと
 る

核関数Kは
 複素指数関数値

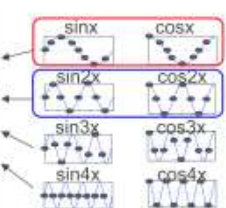
$$e^{-j2\pi\frac{1}{M}kn}$$



定数項、直流成分
 基底周波数成分
 基底X2倍周波数成分
 基底X3倍周波数成分
 基底X4倍周波数成分
 基底X5倍周波数成分
 基底X6倍周波数成分
 基底X7倍周波数成分

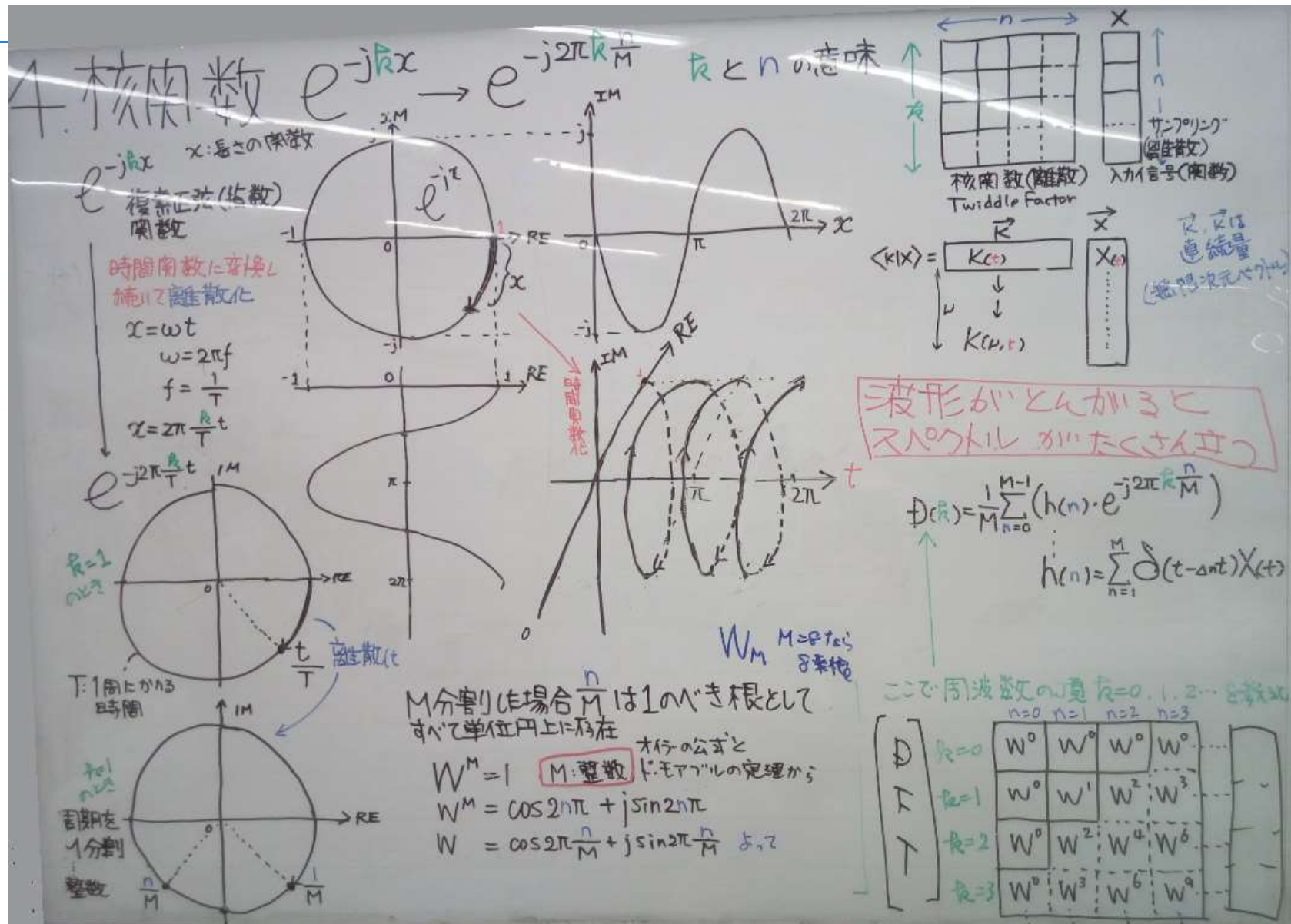
W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
W^0	W^2	W^4	W^6	W^8	W^{10}	W^{12}	W^{14}
W^0	W^3	W^6	W^9	W^{12}	W^{15}	W^{18}	W^{21}
W^0	W^4	W^8	W^{12}	W^{16}	W^{20}	W^{24}	W^{28}
W^0	W^5	W^{10}	W^{15}	W^{20}	W^{25}	W^{30}	W^{35}
W^0	W^6	W^{12}	W^{18}	W^{24}	W^{30}	W^{36}	W^{42}
W^0	W^7	W^{14}	W^{21}	W^{28}	W^{35}	W^{42}	W^{49}

$W^0 := W_8^0$ の略, W_8 は8乗根

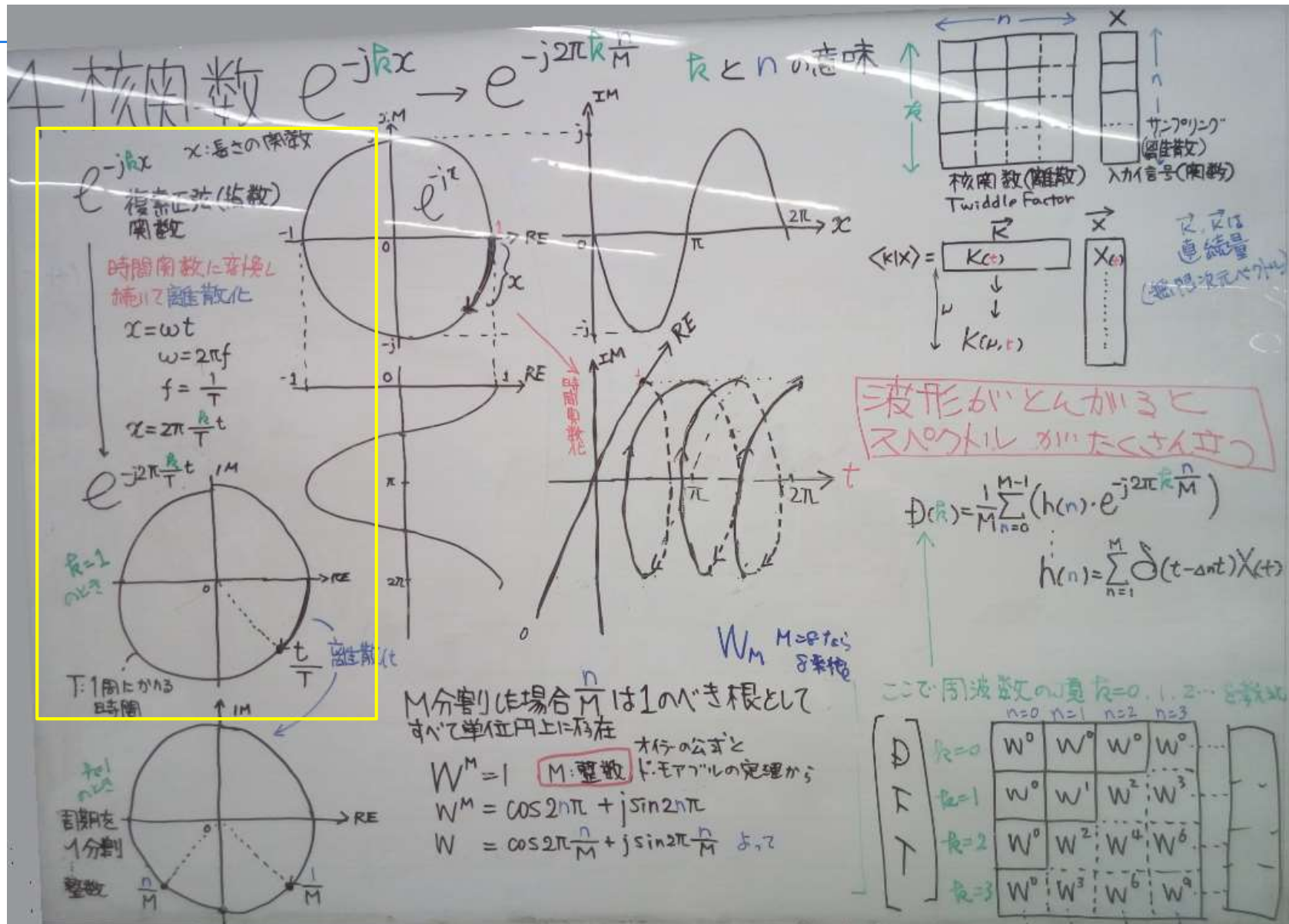


TF:
 Twiddle Factor
 ひねり係数

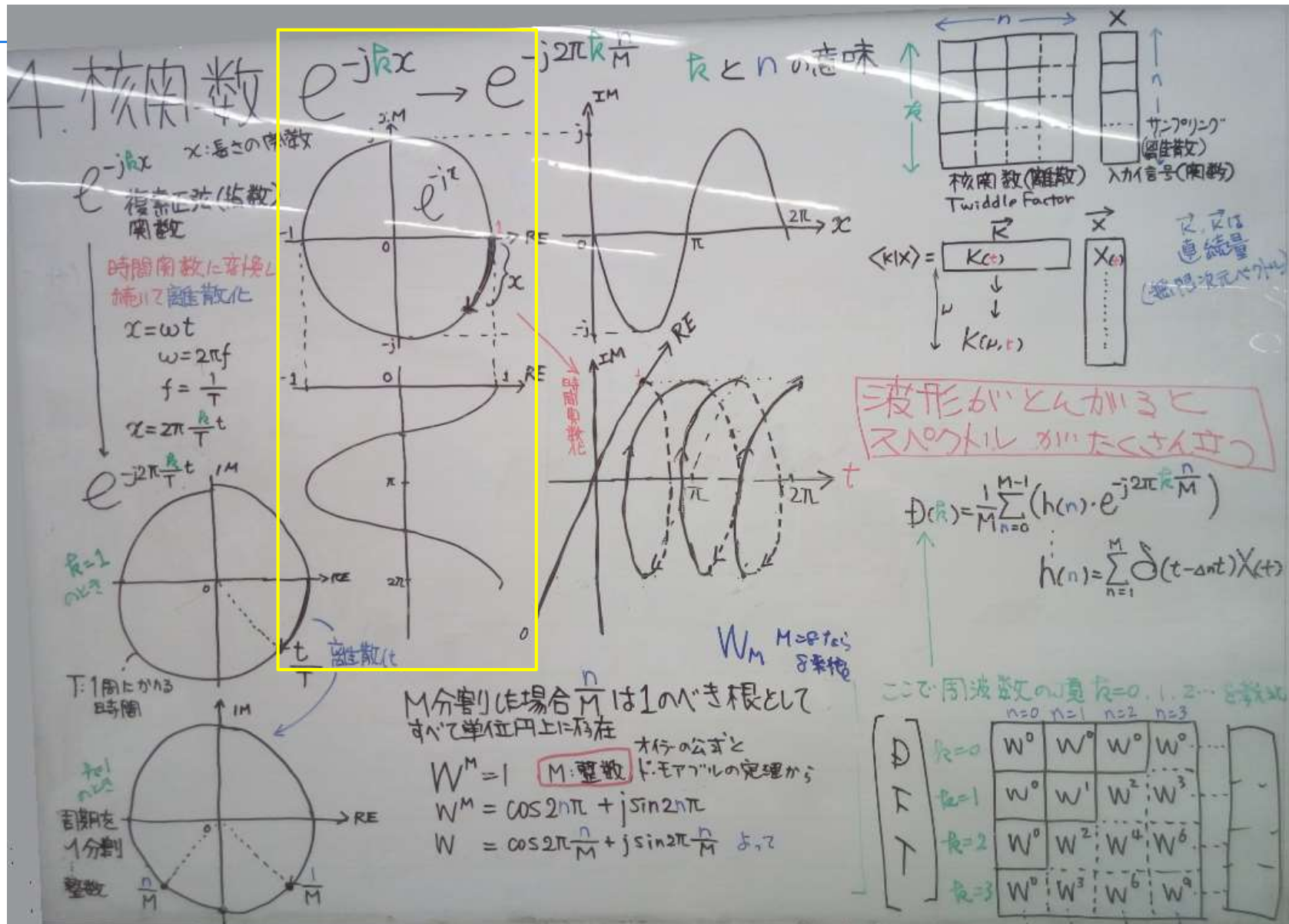
3.3.4 核関数を視覚的にイメージする



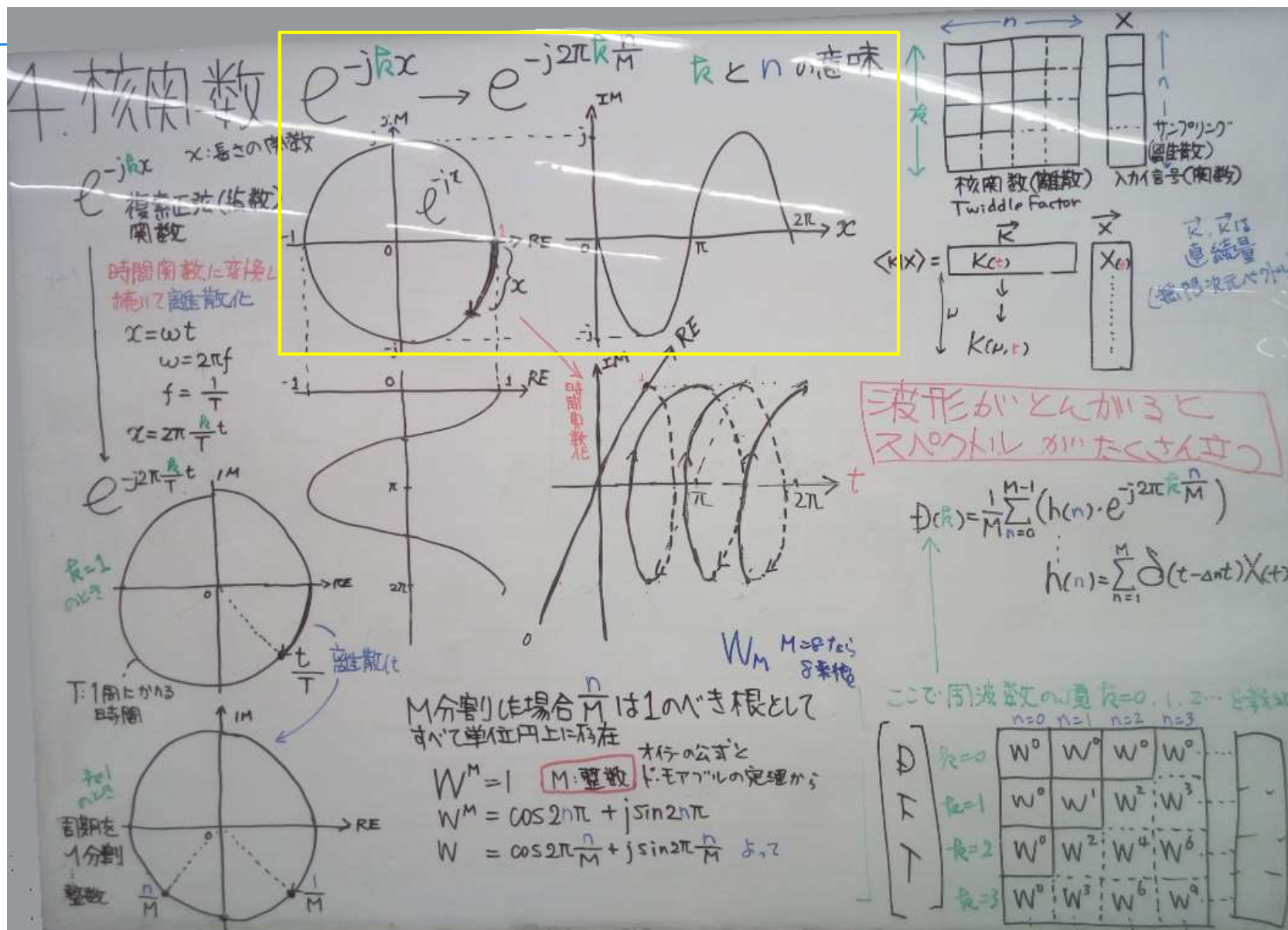
3.3.4 核関数を視覚的にイメージする

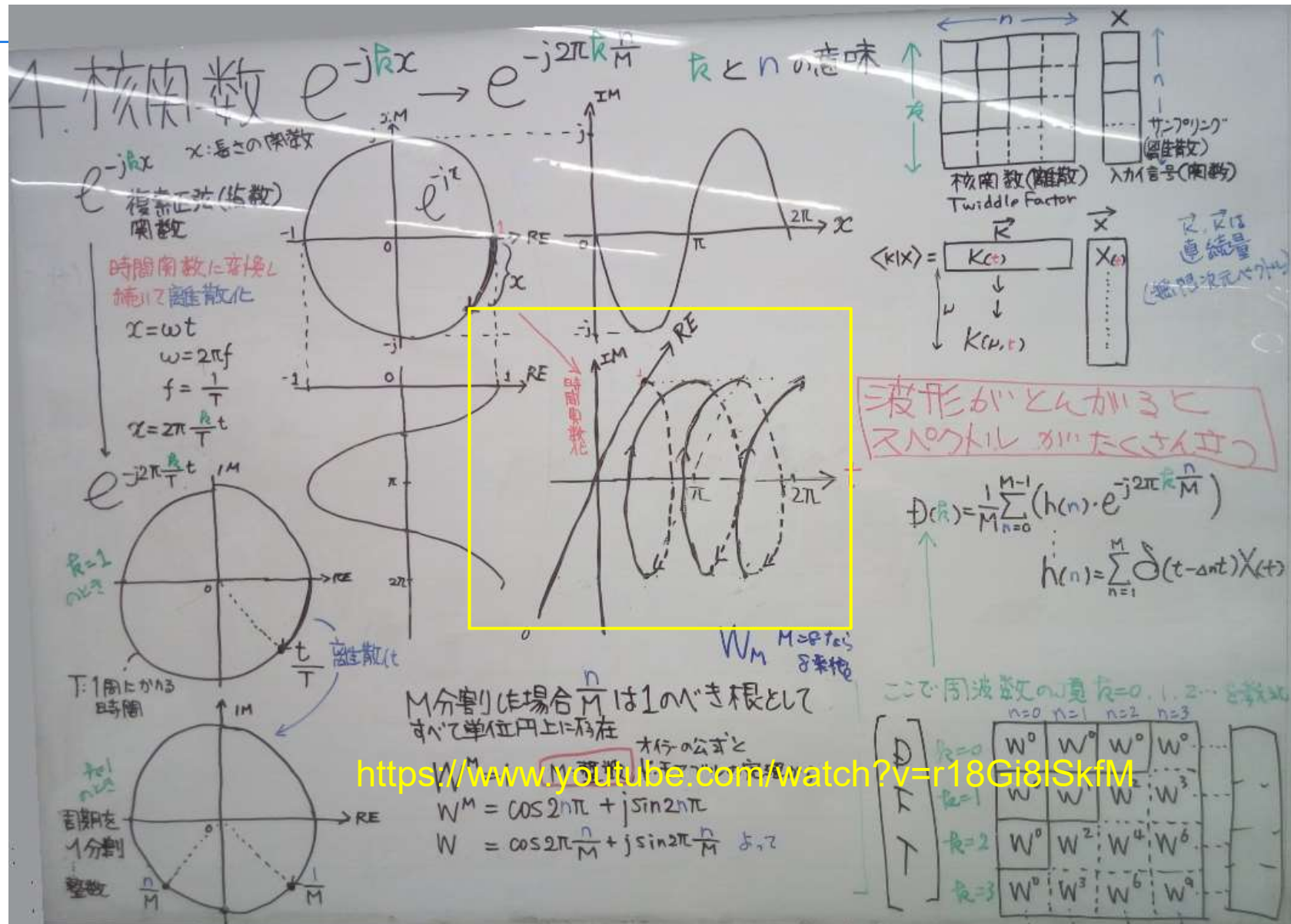


3.3.4 核関数を視覚的にイメージする



3.3.4 核関数を視覚的にイメージする





<https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8ISkfm>

Memo

フォローアップURL (Revised)

<http://mikami.a.la9.jp/meiji/MEIJI.htm>

担当講師

三上廉司(みかみれんじ)

Renji_Mikami(at_mark)nifty.com

mikami(at_mark)meiji.ac.jp (Alternative)

http://mikami.a.la9.jp/_edu.htm

