

Computer Science A

Hardware Design Exercise 2

Handout V2.41 June 27th, 2021

CSAHW Computer Science A, Meiji University

2.3.3, 2.3.4, 2.4.3, 2.4.4 2.8.3 改訂

CSA_B3_EX2.pptx 33 Slides
Renji Mikami

CSAHW2 ハード演習内容

- 2.1 二次元空間でのベクトルの直交
- 2.2 Reserved
- 2.3 N次元ベクトル空間と関数のベクトル化
- 2.4 波同士の相関(相関ゼロは直交)
- 2.5 積分変換
- 2.6 Reserved
- 2.7 DFT/FFTのための行列の形
- 2.8 Reserved for 複素数と微積分

演習と考察はこの配布プリントに書き込んでいってください。(レポート作成のときに参照してください。)

2.1 二次元空間でのベクトルの直交

2.1.1 ベクトルの直交

2.1.2 内積の計算と意味

2.1.3 行ベクトルと列ベクトル

2.1.4 Reserved

2.1.1ベクトルの直交

対象とする空間は、二次元のユークリッド平面です。

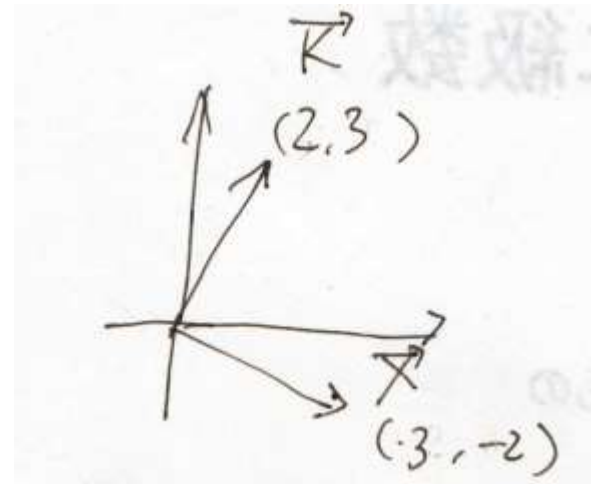
座標は、デカルト直交座標系です。

ここに()内の座標で示される二つのベクトル $K(2,3)$ と $X(3,-2)$ を考えます。この二つのベクトルが直交する場合は、内積はゼロになります。

内積 P の計算は、それぞれの座標の対応する成分同士をかけて加算します。

$P=2*3+3*(-2)=0$ なので、この二つのベクトル K, X は直交しています。

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$



2.1.2 内積の計算と意味

EX212 : ベクトルA(1,3)とB(-2,4)の内積を計算してください

考察 212 :

内積の意味を自由に考察してください

ポイント

内積の計算と行列の関係

内積がゼロでない場合、このスカラー値の意味

2.1.3a 行ベクトルと列ベクトル

行ベクトルを $\langle K|$ と表記する。

列ベクトルを $|X\rangle$ と表記する。

ベクトル K とベクトル X の内積を $\langle K|X\rangle$ と表記する。

$\langle |$ をブラ、 $| \rangle$ をケットと呼ぶ。

この表記を $\langle | \rangle$ ブラケット表記という。

(ディラックのブラケット記法は量子力学などでよく使われます。 $\langle |H| \rangle$)

二つの列ベクトル K, X から内積を求める表記は、

列ベクトル K を転置して行ベクトル化して $\langle K|X\rangle$ と表記する。

EX213

行列ではどのように表記するかをイメージして書き出してください。

2.3 N次元ベクトル空間と関数のベクトル化

2.3.1 三次元ベクトルの内積

2.3.2 内積計算を担保したN次元ベクトル空間

2.3.3 二関数をかけて積分

2.3.4 Reserved

2.3.1 三次元ベクトルの内積

空間を三次元に拡張して三次元のベクトル K', X' を考えます

EX231

$K'(2,3,2)$ と $X'(2,-1,2)$ を図示し、内積 $\langle K'|X' \rangle$ を計算してください。行列ではどう表記するかを考えてください。

考察 231 :

二次元の内積計算は、三次元でも成立したが、次元が4,5...n と増えたらどうなるでしょうか。

2.3.2 内積計算を担保したN次元ベクトル空間

内積計算が成立するN次元空間を張る(ヒルベルト空間/計量ベクトル空間)

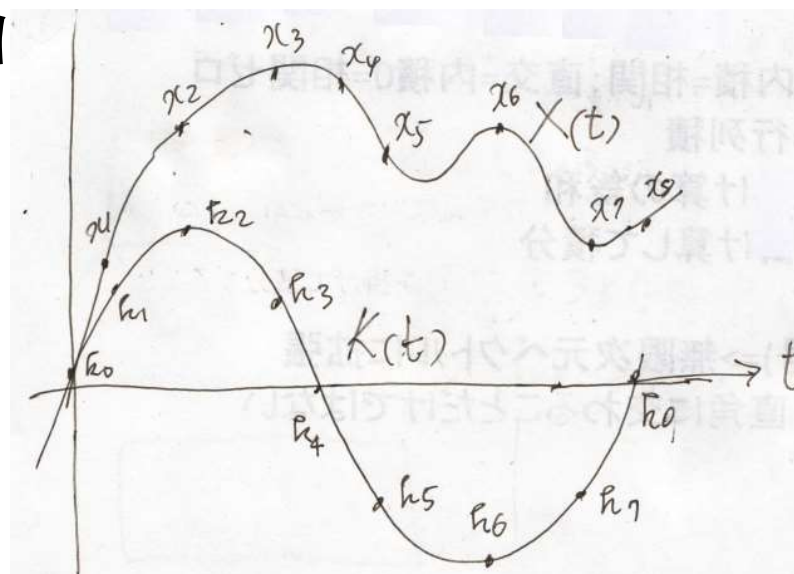
この空間上で時間関数 $K(t)$, $X(t)$ を考える

関数の $K(t)$ 値は $K(t_0), K(t_1), K(t_2) \dots K(t_n) \dots$

関数の $X(t)$ 値は $X(t_0), X(t_1), X(t_2) \dots X(t_n) \dots$

図では離散的な“点”表示
と、連続関数化していく

($\Delta t = t(n+1) - t_n$)



2.3.3 二関数をかけて積分

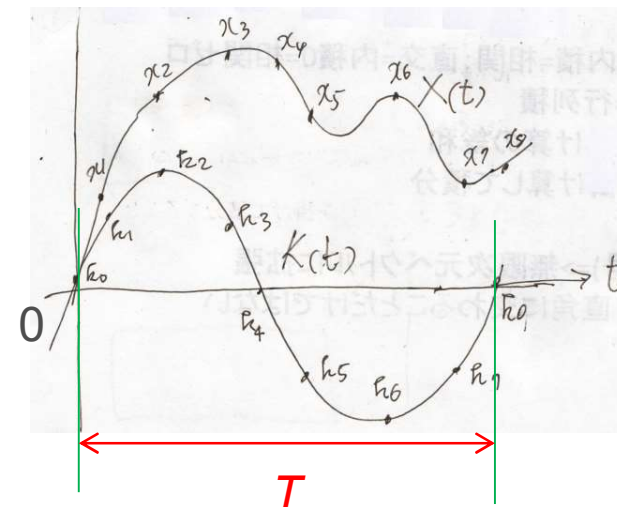
関数は、N次元ベクトルとしてあらわせる。

二関数をかけて積分すると、相関が求まるが、
これはベクトルの内積計算=行列で計算できる。

考察233

関数 $K(t)$, $X(t)$ の t による積分式(積分区間は、0から T とする, T :基本周期)は、ベクトル K とベクトル X の内積として(概念的)にどのように表せるか考えてみよう。

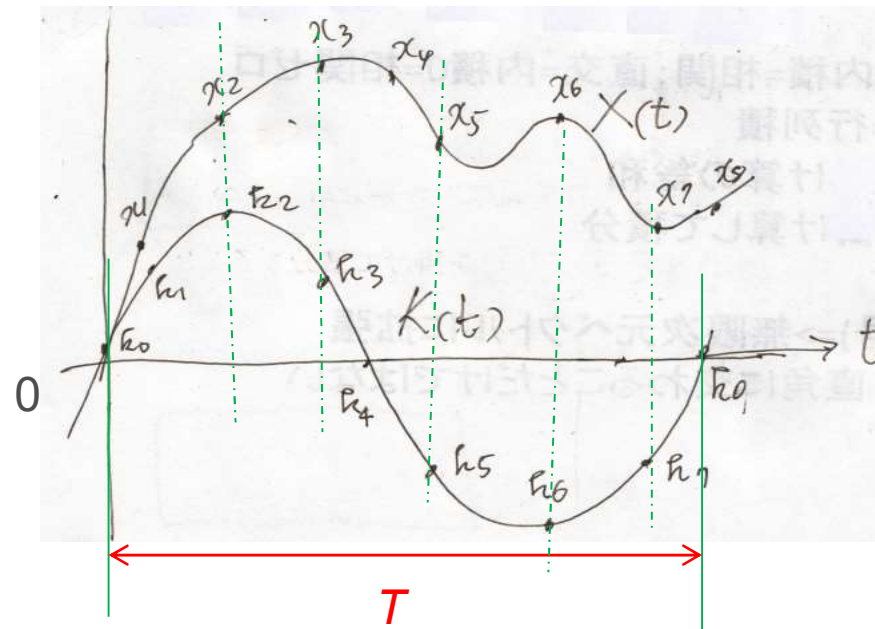
$$\int_0^T K(t)X(t)dt \approx \sum_{n=0}^{n-1} k_n x_n =$$



2.3.4 関数(ベクトル)の相関(内積)を計算

$$\int K(t)X(t)dt \approx \sum_0^{n-1} k_n x_n = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \vec{X}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$

右図は、フリーハンド
なので、 X_n に対応する
 k_n の時間位置がずれて
いますが、実際は
同一時間 t_n における
値と考えてください^^;



連続関数の内積(相関)を求める -> 2関数を掛けて積分する ->
関数を離散化すれば離散化数列の積和で内積(相関)が求まる ->
これ(積和計算)は行列の計算になる

2.4 波同士の相関(相関ゼロは直交)

2.4.1 波同士の相関(相関ゼロは直交)

2.4.2 矩形波の級数展開

2.4.3 矩形波の n 倍角級数展開

2.4.4 相関係数をまとめた行列

2.4.5 Reserved

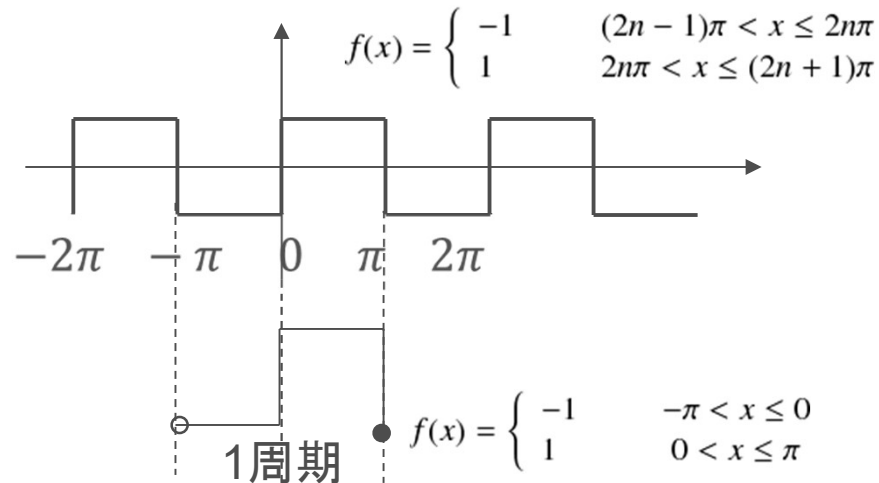
2.4.1 波同士の相関(相関ゼロは直交)

二関数をかけて積分した値は、ベクトルの内積であり、これは行列積であり、このスカラー値は、二関数の相関を計算したもの。この値が級数の**係数**となる。(後述)

二関数に相関がなければ、内積(**係数**)がゼロで関数は、直交している。

“関数”は、信号、波、ベクトル、数列と大胆に置き換えて理解してしまおう。

2.4.2 矩形波の級数展開

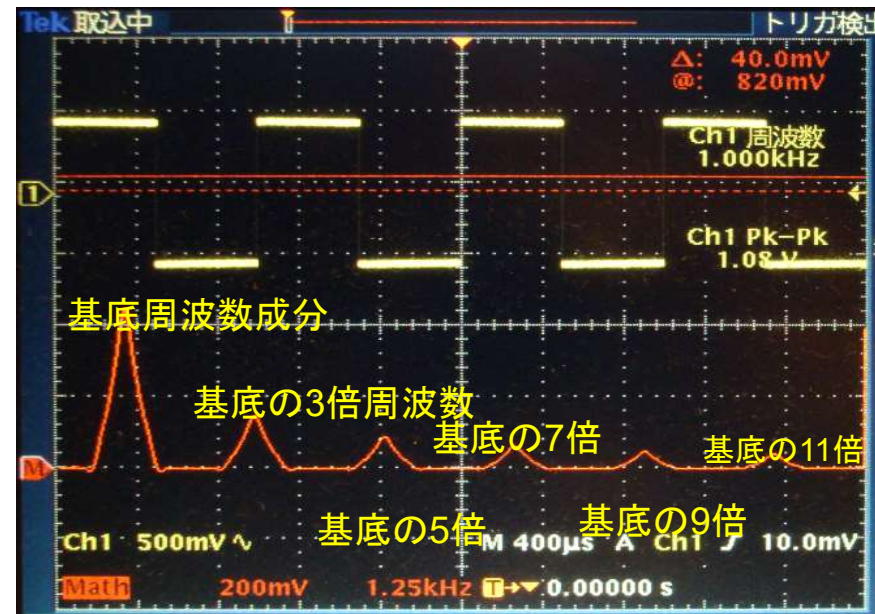


$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x \dots \right)$$

上の式が矩形波のフーリエ級数展開になります。

考察242

EX1の矩形波のスペクトラム分解を内積(相関)計算から考察してください



基底波を1KHzとすると
1KHz, 3KHz, 5KHz, 7KHz

2.4.3 矩形波のn倍角級数展開

サインの各係数
はどのようにして
求まるでしょうか

$$\sin(x) \text{ の係数} = \int \sin_{(x)} R_{(x)} dx \approx \sum_{n=0}^{n-1} \sin_n R_n$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

次の2.4.4
ではこれらを
ひとつに
まとめて
いきます

$$\sin(3x) \text{ の係数} = \int \sin_{(3x)} R_{(x)} dx \approx \sum_{n=0}^{n-1} \sin_{3n} R_n$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

$$\sin(5x) \text{ の係数} = \int \sin_{(5x)} R_{(x)} dx \approx \sum_{n=0}^{n-1} \sin_{5n} R_n$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

$$\sin(7x) \text{ の係数} = \int \sin_{(7x)} R_{(x)} dx \approx \sum_{n=0}^{n-1} \sin_{7n} R_n$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

2.4.4 相関係数をまとめた行列

4行をひとつにまとめると K は
下の**正方行列**になります
離散フーリエ変換も
この形になっています

求められた係数

$$\begin{bmatrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\square\square\square\square] \\ [\square\square\square\square] \\ [\square\square\square\square] \\ [\square\square\square\square] \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \\ K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

この形を覚えておくこと
FFTもこの形から畳み込みます
 K のことを**核関数**という

$$\begin{bmatrix} [\square\square\square\square] \\ [\square\square\square\square] \\ [\square\square\square\square] \\ [\square\square\square\square] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

K'

K''

K'''

K''''

2.5 積分変換

2.5.1 積分と変数の消去

2.5.2 時間関数から周波数関数への変換

2.5.3 積分を行列で計算

2.5.4 Reserved

2.5.1 積分と変数の消去

定積分 $\int_a^b X(t)dt$ を計算すると“面積”が数値で求まります。

皆さんは、誰でもこのことを知っています。でもこの積分をよく見ると、変数 t が消えています。実は、面積を求める定積分は、変数を消すことでもあります。積分変換は、核関数が2変数関数なので、残りの変数が消した関数に置き換わります。

考察251

元の関数 $X(t)$ に2変数を持つ関数 $K(v, t)$ をかけて積分するとどうなるか考えてみましょう。式は以下のようになります。 T は変換 (*Transfar*) を意味し、新しい関数 $(TX)(v) = G(v)$ とおくと $G(v)$ はどのような関数になるでしょうか。ここで t は時間変数、 v は周波数変数です。

$$G(v) = (TX)(v) = \int_{t1}^{t2} K(v, t)X(t)dt$$

2.5.2 時間関数から周波数関数への変換

核関数 K が、2変数関数

核関数が2変数関数なので、積分によって残りの変数が消した関数に置き換わります。

$$G(\nu) = (TX)(\nu) = \int_{t_1}^{t_2} K(\nu, t)X(t)dt$$

$X(t)$ は、時間 t を変数とする時間関数です。

t (時間)と ν (周波数)の2変数を持つ核関数 $K(\nu, t)$ をかけます。

そして、 t (時間)で一定時間(t_1 から t_2)積分します。

そうすると変数 t が消えて、変数 ν が残ります。

つまり新しい ν を変数とする関数ができます。

これによって、時間関数は周波数関数へ変換されます。

積分変換では、2変数の核関数をかけて、共通変数で積分し、片方の変数を消去し、残った変数による関数を得ます。

フーリエ変換では、時間軸から周波数軸への変換になります。

2.5.3 積分を行列で計算

二関数をかけて積分することは、行列積を求めることです。

考察253

積分変換を行列で解くことを 2.4.4 の例で考察してください。

$$\begin{array}{c} G(v) \\ \left[\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} K(v,t) \\ \left[\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} X(t) \\ \left[\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right] \end{array}$$

正方行列

t は列ベクトル
v は行ベクトル
に対応しています

K(v,t)は2変数関数
なので正方行列
になります

離散フーリエ変換 - DFT(Discrete Fourier Transform)は、
この形をしています。左辺にはDFT値=係数が得られます。

2.7 DFT/FFTのための行列の形

2.7.1 DFTと基数2のFFT

2.7.2 DFTの形-テキスト4から抜粋

2.7.3 DFT行列解説

2.7.4 DFTの核関数

2.7.5 Reserved

DFT
Discrete Fourier Transform
離散フーリエ変換
FFT
Fast Fourier Transform
高速フーリエ変換

2.7.1 DFTと基数2のFFT

FFT (Fast Fourier Transform) は、離散フーリエ変換(DFT)を高速で計算するアルゴリズムです。

OFDMで使われる64ポイントFFTは、基数2で畳み込みます。
このためには、列ベクトルX(もとの入力信号)の要素数は、2の冪乗($64=2^6$)にします。

核関数Kは、 64×64 の正方行列になります。

EX271

OFDMを調べて自分なりの理解をイメージとして書いてみる(この段階でOFDMがわからなくてもかまいません)

2.7.2 DFTの形-テキスト4から抜粋

D0が、定数項(直流項),

D_1 が基底周波数 $x1$ の成分,($n=1$ の場合)

係数は複素数($a+bj$)

振幅スペクトル $|Z|=\sqrt{(a^2+b^2)}$ で計算

D2が2倍の周波数成分,

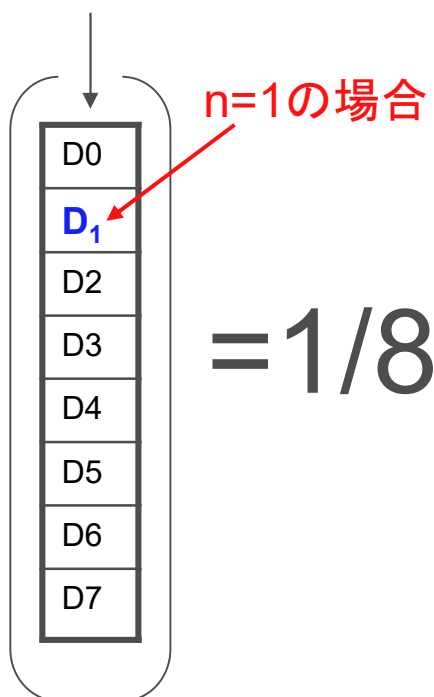
D3が3倍の周波数成分,

複素指数関数値

$$e^{-j2\pi\frac{1}{M}kn}$$

e^{-jnx} 核関数

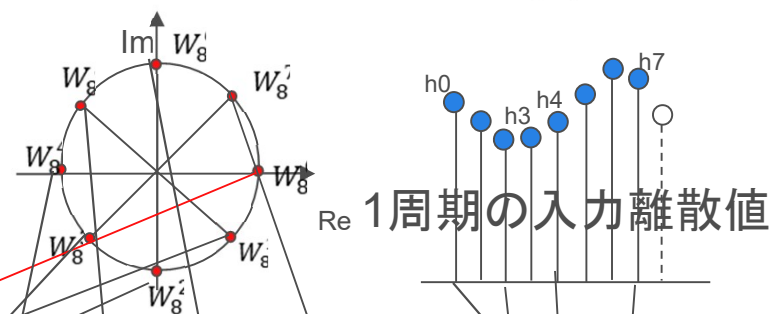
$X(n)$



TF:ひねり係数行列

W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
W^0	W^2	W^4	W^6	W^8	W^{10}	W^{12}	W^{14}
W^0	W^3	W^6	W^9	W^{12}	W^{15}	W^{18}	W^{21}
W^0	W^4	W^8	W^{12}	W^{16}	W^{20}	W^{24}	W^{28}
W^0	W^5	W^{10}	W^{15}	W^{20}	W^{25}	W^{30}	W^{35}
W^0	W^6	W^{12}	W^{18}	W^{24}	W^{30}	W^{36}	W^{42}
W^0	W^7	W^{14}	W^{21}	W^{28}	W^{35}	W^{42}	W^{49}

$W^0 := W_8^0$ の略



$$D1=h0*W0+h1*W1+h2*W2+h3*W3+h4*W4+h5*W5+h6*W6+h7*W7$$

2.7.3 DFT行列解説

右辺右側の列ベクトル($h_0 \dots h_7$)が入力信号です。

“列”の値はサンプリングされた時間離散値です。

中央の正方行列が核関数 K に相当します。

左辺がDFT値(係数)です。

正方行列と係数の各“行”が n 倍周波数項に対応しています。

D0が、定数項(直流項),
 D_1 が基底周波数 $\times 1$ の成分,($n=1$ の場合)
係数は複素数($a+bj$)
振幅スペクトル $|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$ で計算
D2が2倍の周波数成分,
D3が3倍の周波数成分,

考察272

ポイント数が8(8x8 正方行列)
になっている理由を
考えてください

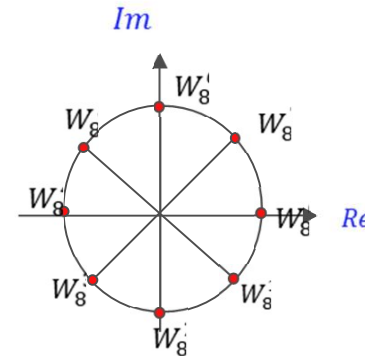
2.7.2 のTF:Twiddle Factor
ひねり係数行列は
正方行列になっています

2.7.4 DFTの核関数-テキスト4から抜粋

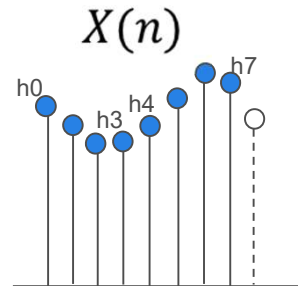
かける核関数(TF)の行は
基底周波数の整数倍の
周波数になっている。
元の信号Xに含まれる各
周波数成分との相関をと
る

核関数Kは
複素指数関数値

$$e^{-j2\pi \frac{1}{M} kn}$$



もとの信号



定数項、直流成分

基底周波数成分

基底X2倍周波数成分

基底X3倍周波数成分

基底X4倍周波数成分

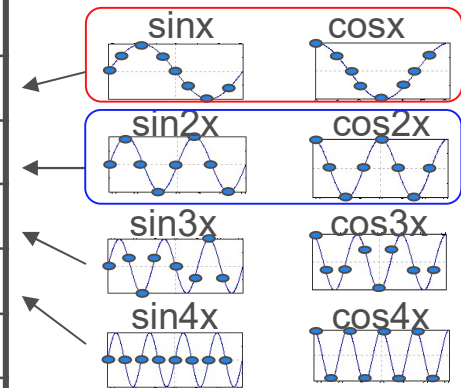
基底X5倍周波数成分

基底X6倍周波数成分

基底X7倍周波数成分

W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
W^0	W^2	W^4	W^6	W^8	W^{10}	W^{12}	W^{14}
W^0	W^3	W^6	W^9	W^{12}	W^{15}	W^{18}	W^{21}
W^0	W^4	W^8	W^{12}	W^{16}	W^{20}	W^{24}	W^{28}
W^0	W^5	W^{10}	W^{15}	W^{20}	W^{25}	W^{30}	W^{35}
W^0	W^6	W^{12}	W^{18}	W^{24}	W^{30}	W^{36}	W^{42}
W^0	W^7	W^{14}	W^{21}	W^{28}	W^{35}	W^{42}	W^{49}

$W^0 := W_8^0$ の略, W_8 は8乗根



TF:

Twiddle Factor

ひねり係数

2.8 複素数と微積分

2.8.1 ネイピア数とオイラーの公式

2.8.2 複素正弦関数

2.8.3 複素正弦関数の微積分の意味

2.8.4 テキスト2 抜粋解説

$e^{i\pi}$ の値は?

以降虚数単位はjを使います

2.8.1 ネイピア数とオイラーの公式

e :ネイピア数:微分しても元の関数と同じになる定数

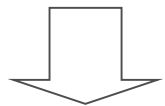
オイラーの公式

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$$

ド・モアブルの定理 (n は整数)

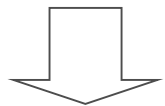
$$\begin{aligned}(\cos x + j \sin x)^n \\&= \cos nx + j \sin nx \\(e^{jx})^n &= e^{jnx}\end{aligned}$$

n 倍角問題が n 乗問題で解ける!



三角関数がネイピア数の複素関数で表される
ド・モアブルの定理で n 倍角の場合に一般化できる

$$\cos nx = \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2}, \sin nx = \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j}$$



フーリエ級数の $\sin, \cos$ の項がひとつ
にまとまり、複素正弦関数化できる

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{式は(テキスト3参照)}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnx} \dots \text{テキスト3(6)式} \dots \text{とあらわせる}$$

C_n は複素係数、 e^{jnx} は複素正弦関数

ここから下は EX3 でやります

三角関数による
フーリエ級数は、
ネイピア数を含んだ
複素級数に変換できます

2.8.2 複素正弦関数

ガウス平面(複素平面)- 実数と虚数による二次元空間

複素平面上のある領域で、関数が微分可能であれば、その関数はその領域で正則であるといいます。正則であれば何度でも微分することが可能です。

EX282.1:

ネイピア数 e を使用した複素正弦関数(複素指数関数) e^{jx} を微分してください。Maximaを使って検算してください。

EX282.2:

EX282.1で得られた解をもう一度微分してください。同様にさらに微分を続けてみてください。

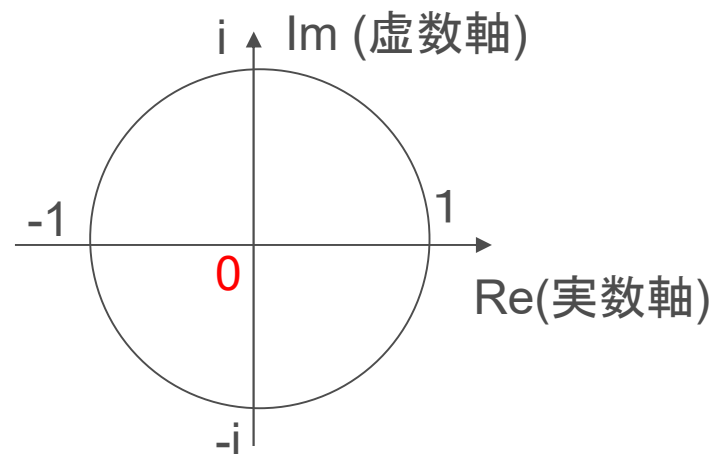
考察282

同様に積分を行うとどうなるかを考察してください。

2.8.3 複素正弦関数の微積分の意味

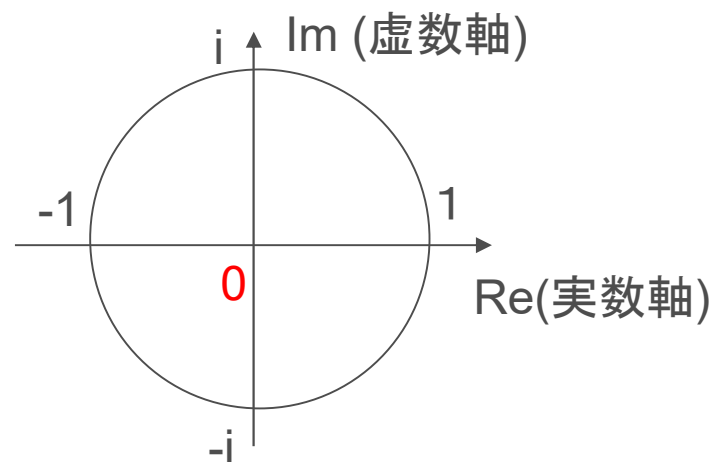
EX283.1:

複素正弦関数の複数次の微分を
右の複素平面にプロットしてください。



EX283.2:

複素正弦関数の複数次の積分を
右の複素平面にプロットしてください。



考察283:

微分と積分は逆演算ですが、
この演算は複素平面上で、
どのような意味を持つでしょうか

2.8.4 解説:テキスト2から抜粋

ネイピア数と複素正弦関数の微積分

e:ネイピア数:微分しても元の関数と同じになる定数

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{の極限}$$

指数関数 $f(x) = a^x$ において $\frac{d}{dx} a^x = a^x$ となるとき $a = e$

e^{jx} 複素正弦関数

オイラーの公式使ってます

ここで、xで微分すると

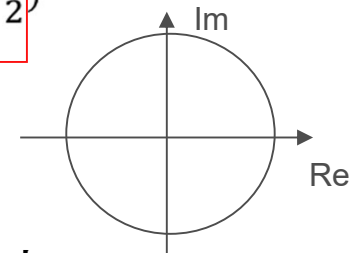
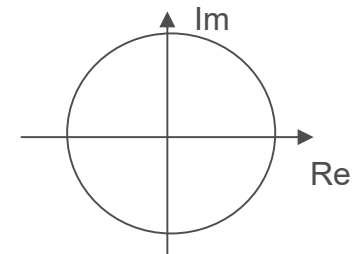
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{jx} &= j e^{jx} \quad , \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}} \text{より} \\ j e^{jx} &= e^{j\frac{\pi}{2}} e^{jx} = e^{j(x+\frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2}$ だけ反時計回りに回転

ここで、xで積分すると

$$\begin{aligned} \int e^{jx} dx &= \frac{1}{j} e^{jx}, \frac{1}{j} = -j \Rightarrow e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{より} \\ \frac{1}{j} e^{jx} &= e^{jx} e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{j(x-\frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2}$ だけ時計回りに回転



実数領域の三角関数の式を複素数に拡張して複素正弦関数に変換すると微積分の計算が容易になります。

EX2のポイント

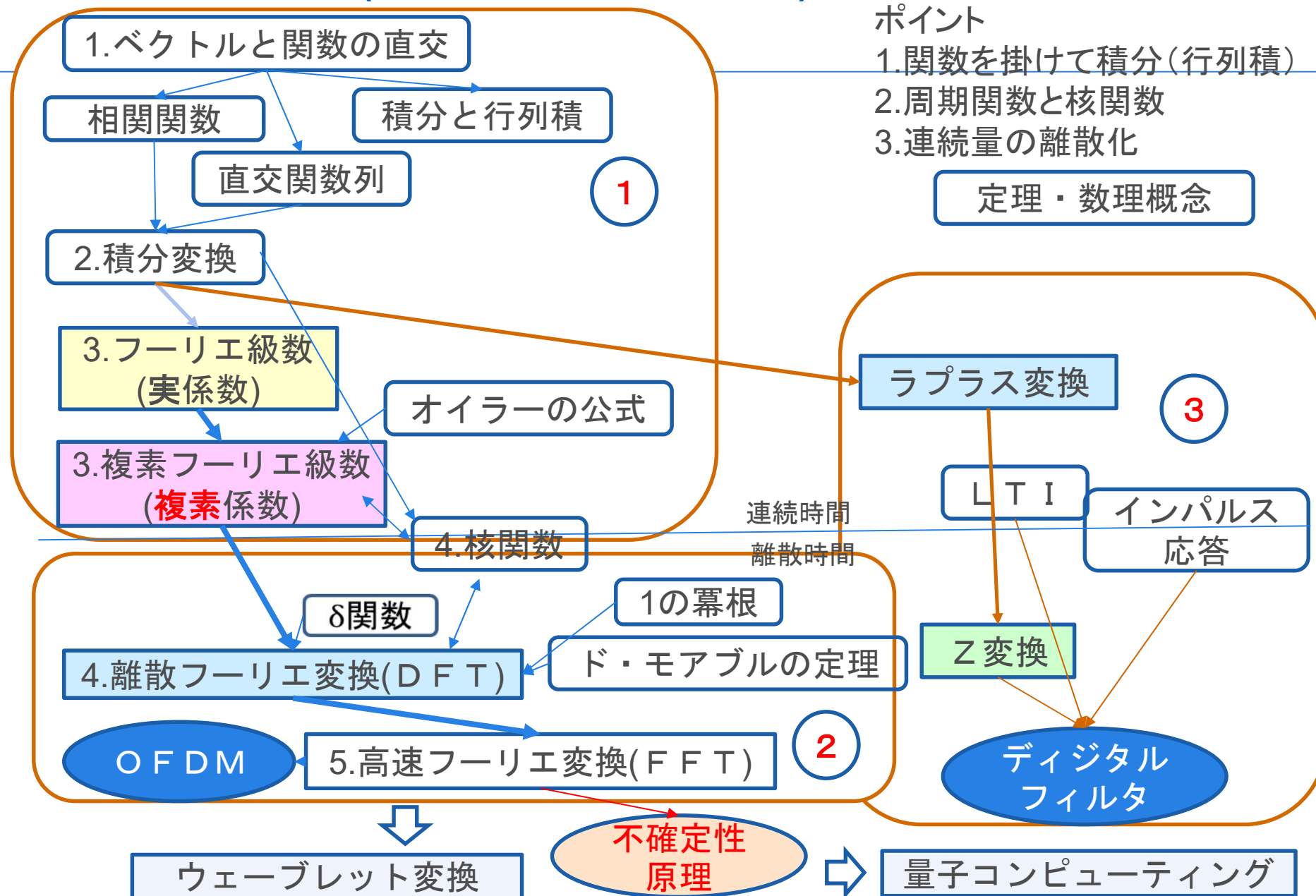
1. ベクトル空間をN次元化すると関数はN次元ベクトルになる
2. ベクトルの内積=行列積だから、二関数の相関は、行列積で計算できる
3. 二関数のうちのひとつを(比較の元になる)核関数K、残りのひとつを元の関数Xとする。KとXの相関(内積)を計算すると値は、Xに含まれるKの成分比(=係数)となる。
4. 定積分によって変数を消すことができる
5. 核関数を二変数関数にして、片方の変数で積分するとその変数が消える。もうひとつの変数に残り、新しい変数による関数が求まる。これが積分変換
6. 核関数は、正方行列だが、このポイント数を2の冪乗にしておく。これによって、基数2のFFT畳み込みができる。
7. 核関数の行は、n倍角(n倍周波数)になっているが、これは直交関数列である

講義の流れ(現在位置の確認)

ポイント

- 1.関数を掛けて積分(行列積)
- 2.周期関数と核関数
- 3.連続量の離散化

定理・数理概念



Memo

フォローアップURL (Revised)

<http://mikami.a.ia9.jp/meiji/MEIJI.htm>

担当講師

三上 廉司(みかみれんじ)

Renji_Mikami(at_mark)nifty.com

mikami(at_mark)meiji.ac.jp (Alternative)

http://mikami.a.ia9.jp/_edu.htm

