Computer Science A
Hardware Design Exercise 1
Handout V2.24 December 13th.,2021

CSAHW Computer Science A, Meiji University

CSA_B3_EX1.pptx 30 Slides

Renji Mikami

CSAHW1 ハード演習内容

0.演習のねらいと進め方、手法

1.1 Maxima を使う

　理解は直観とイメージで、計算はツールで

1.2 直交する波や関数

　波同士の相関(相関ゼロは直交)

1.3 繰り返す波(周期関数)の分解

　矩形波からサイン波をとりだす

1.4 直交関数による関数合成(波の合成)

1.5 あらゆる波（関数）の分解と合成

　繰り返す波から時間を消す

演習と考察はこの配布プリントに書き込んでいってください。(レポート作成のときに参照してください。)

0.演習のねらいと進め方、手法

0.1 ねらい

- 0.1.1 学んだ知識を役立てる
- 0.1.2 わかるとおもしろくなってくる
- 0.1.3 作れば納得できて、忘れなくなる

0.2 そのためには

- 0.2.1 誤りを怖れない。正確さや厳密さはとりあえずおいておく
- 0.2.2 直観とイメージで本質を理解する
- 0.2.3 計算はコンピュータにやらせる
- 0.2.4 (式の計算よりも)式を多様に読み解く力をつける

0.3 真に根付いた知識こそ力となる

- 0.3.1 解き方の暗記ではなく、解法を考え出せる力をつける

1.1 Maxima を使う

1.1.1 Maxima に慣れる

-関数とグラフ

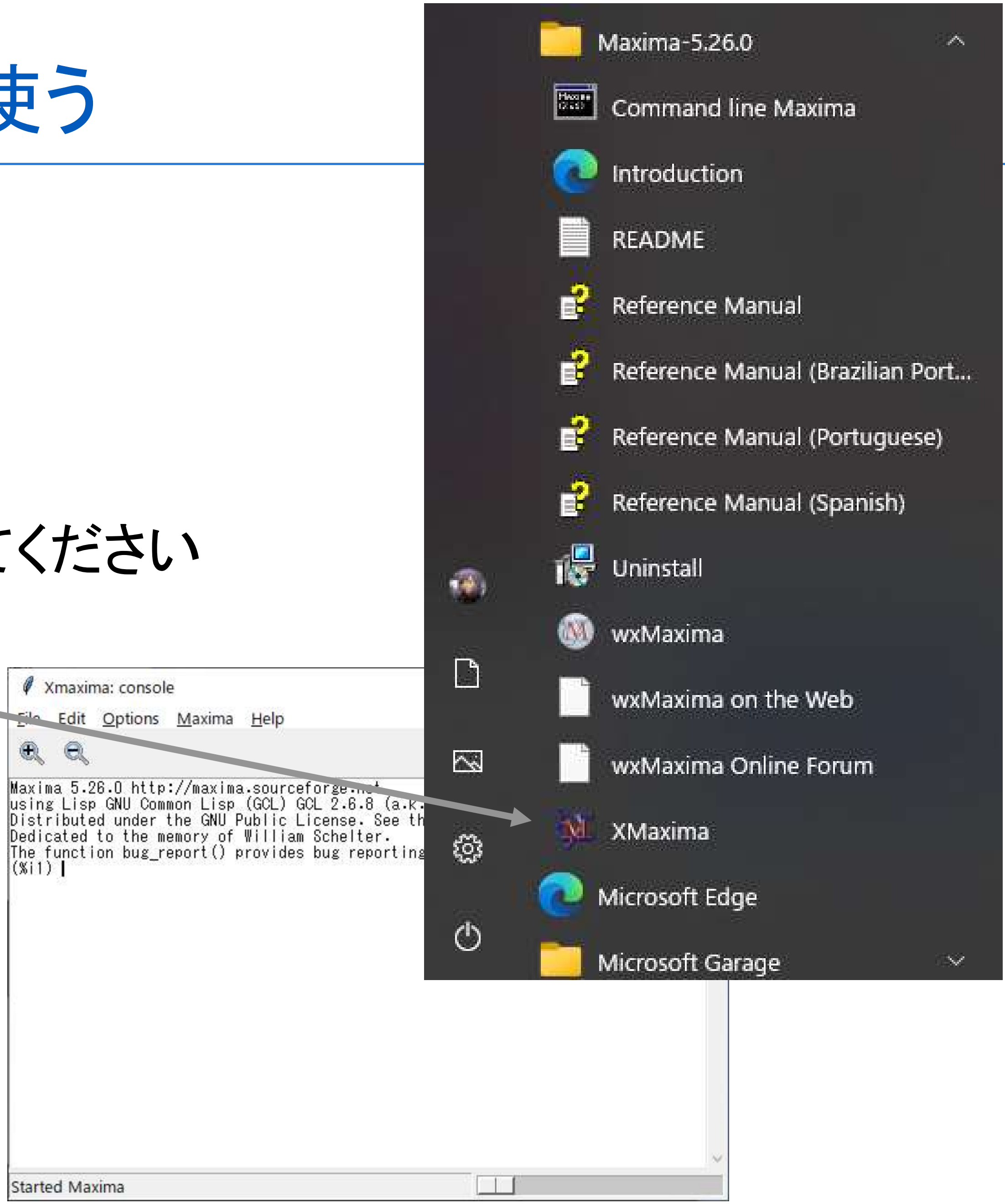
-行列

-複素数とexp

Xmaxima のほうを使ってください

(Vxmaxima ではなく)

注意すること
テキストの操作どおりに図や計算ができても安心せずに、演習の意味を考察してください。



1.1 Maxima を使う

1.1.1 Maxima に慣れる

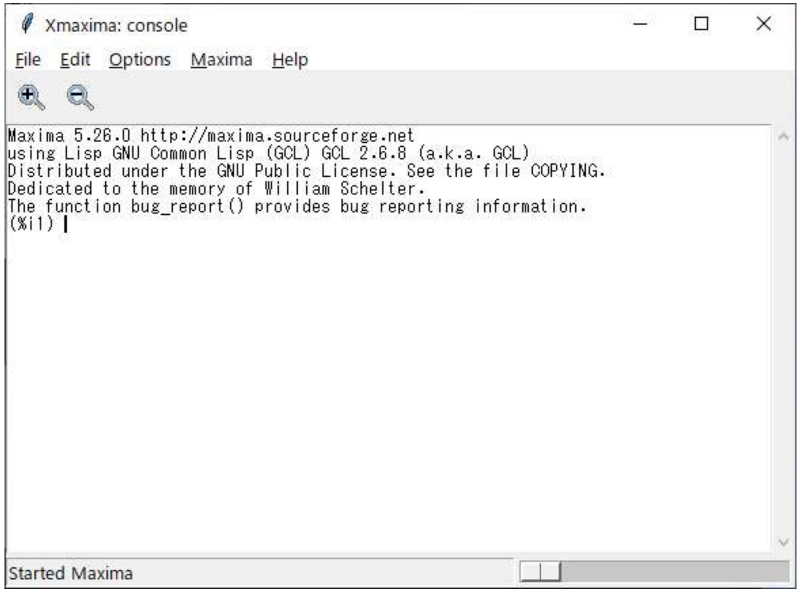
-関数とグラフ

-行列

-複素数とexp

Xmaxima のほうを使ってください

(Vxmaxima ではなく)



注意すること
テキストの操作どおりに図や計算ができても安心せずに、演習の意味を考察してください。

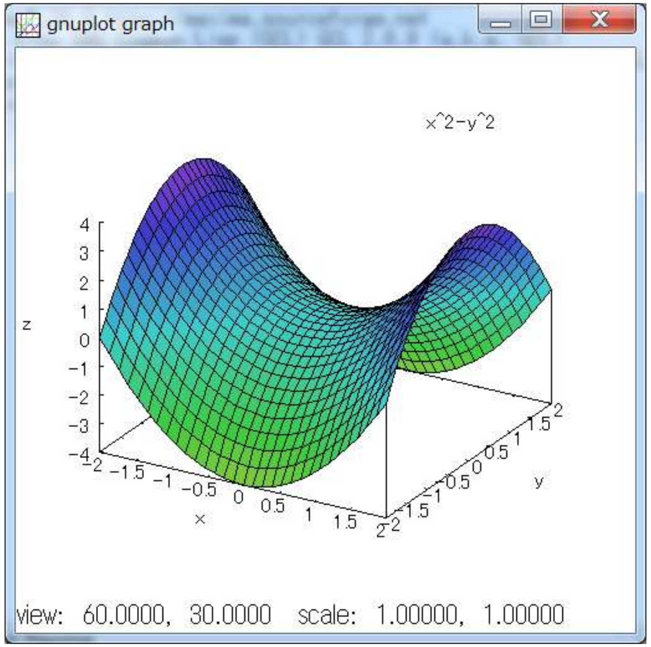
課題演習の方法
1.仮説を立て解を推定する。
2.実験(ツールで計算)で、検証する。
3.検証結果から、仮説を再構築する。
4.再検証する。(3-4を反復)
5.考察としてまとめる

1.1.1 Maximaに慣れる1 – 関数とグラフ

Xmaximaを起動する。 (%i1)プロンプトの後に数式コマンドを打ち込む。
;(セミコロン)で実行 、結果は(%o1)プロンプトの後に表示される。
EX111.1: Maxima で関数$x^2 - y^2$の 3D グラフを表示させてみる。
(注：次のグラフ表示に進む前にグラフ表示ウインドウは閉じておくこと)

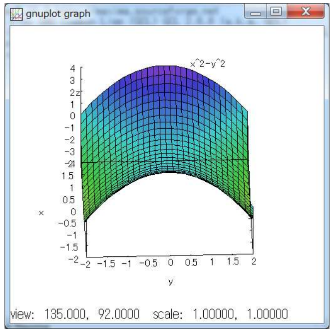
(%i1)plot3d(x^2-y^2,[x,-2,2],[y,-2,2]);

$x^2 - y^2$



解説： plot3d (): 三次元グラフ表示コマンド
: x^2-y^2 :表示させる関数
: ,[x,-2,2],[y,-2,2] : x と y の値域

マウスでグラフのビューポイントを変えてみよう。



レポートには、
何かコメントを
書いてください。
図や式は必要ありません

1.1.1 Maximaに慣れる2 – 行列

EX111.2：Maximaを使って行列を計算してみよう
例題：行列Aと行列Bを定義する、
行列AとBの和をCとする。

```
(%i2) A: matrix(
 [0,1,2],
 [2,1,0]
);
                    [ 0  1  2 ]
(%o2)               [         ]
                    [ 2  1  0 ]
(%i3) B: matrix(
 [1,1,1],
 [0,0,0]
);
                    [ 1  1  1 ]
(%o3)               [         ]
                    [ 0  0  0 ]
(%i4) C = A + B;
                    [ 1  2  3 ]
(%o4)          C =  [         ]
                    [ 2  1  0 ]
```

EX111.3：行列の積を計算してみよう。検算は、Maximaを使用する。行列Pと行列Qの積Rは、R=P.Qと記述する。(Pピリオドク)

行列Pは、4行4列で、行列Qは、1行4列である。値は、以下のとおり。

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

フーリエ変換が行列積で解ければ、プログラムの for 文のネスティングで、容易に計算ができます。
詳細は、これから演習で解説します。
レポートには、コメントを書いてください。図や式は必要ありません。

1.1.1 Maximaに慣れる3 – 複素数とexp

虚数単位 i (j)は、%i を使う　%i*%i = -1

ネイピア数は、expを使う　e^x はexp(x)と記述：

EX111.4　exp(%i*%pi);　を計算してみる。

EX111.5　exp(±ix)=cos(x) ± i sin(x) オイラーの公式を計算してみる

複合同順は、Maximaでは扱えないので+/-は別々に計算してください。

EX111.6 デルタ関数のラプラス変換 laplace(delta(t),t,s);

詳細は、数学編テキストで解説。

考察 111

どうして行列をやるのか？

行列はどう役立つのか？

コメントしてください。

考察 112

なぜ虚数をやるのか？

どこで虚数を使うのか？

コメントしてください。

1.2 直交する波や関数

1.2.1 直交する波とグラフ

- -2関数をかけて積分値を求める

1.2.2 波同士の相関

- -相関ゼロは直交
- -波＝関数

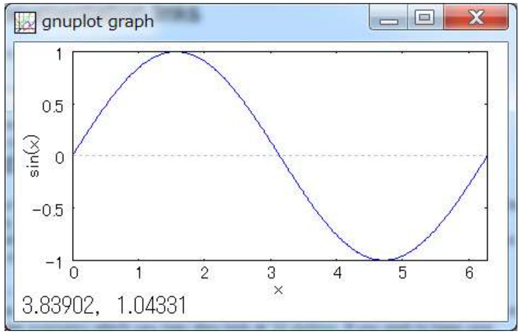
1.2.3 自己相関

- -自分自身をかけて積分

1.2.1 直交する波とグラフ

EX121.1: sin(x) の2Dグラフを表示させる。値域は、[x, 0, 2*%pi] (ゼロから2π)

(%i2) plot2d(sin(x),[x, 0, 2*%pi]);



解説: plot2d (): 二次元グラフ表示コマンド

: sin(x)　: x ラジアンを変数とする正弦関数

: *　: 乗算の演算子

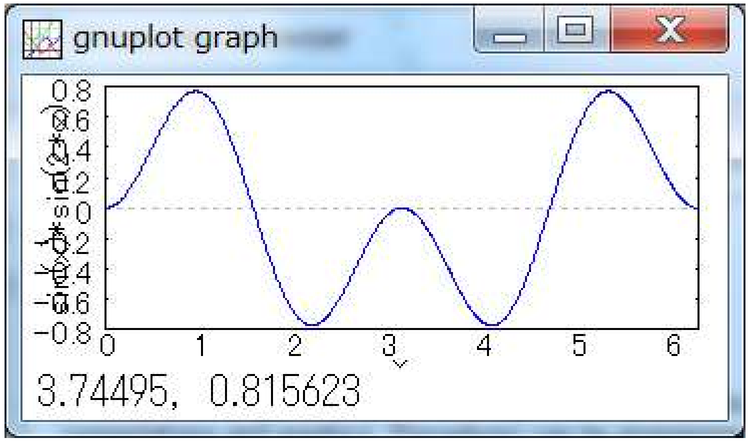
: %pi : 定数π(パイ)

: (表示されたグラフは次のグラフ表示の前に閉じること)

EX121.2: 値域 [x,0,2*%pi] でsin(x)*sin(2*x) のグラフを表示させ、定積分値を考察する。(%i3) plot2d(sin(x)*sin(2*x),[x,0,2*%pi]);

考察 121

sin(x)とsin(2*x)を掛けた意図は？
なぜ値域を0から2 πにとったのか？
値域が別の値だったらどうなるのか？
ふたつの関数をかけて積分することは、
何を意味するか？



1.2.2 波同士の相関(相関ゼロは直交)

EX122.1:実際の積分値を求める。

(%i4) integrate(sin(x)*sin(2*x),x, 0, 2*%pi);

解説: integrate(引き数1,引き数2,引き数3,) : 積分の計算コマンド

: 引き数1　: 積分する関数

: 引き数2　: 積分する変数(ここでは x, つまり数式では、dx)

: 引き数3　: 積分区間

考察 122.1 : 値は何を意味するか? 値が0は二関数のどのような関係を意味するか?

EX122.2 :同じ積分区間で、m, n が正整数の場合の積分値を推定してみよう。

m,n は、任意の正整数値をあてはめてよい。

sin(m*x)*sin(n*x) の場合

cos(m*x)*cos(n*x) の場合

cos(m*x)*sin(n*x) の場合

推定した積分値を maxima を使って検算してみよう。グラフも表示させてみよう。

考察 122.2 : cos(m*x)、sin(n*x) なる関数の集合の性質は? (m,n 正整数)

おまけ: 微分は、diff で計算できる。diff(sin(x),x);

1.2.3 自己相関1

EX123.1 :

sin(x)とsin(x)をかけて1周期ぶん 積分してください。値はどうなるでしょう。

(%i4) integrate(sin(x)*sin(x),x, 0, 2*%pi);

解説: integrate(引き数1,引き数2,引き数3,) : 積分の計算コマンド

: 引き数1　: 積分する関数

: 引き数2　: 積分する変数(ここでは x, つまり数式では、dx)

: 引き数3　: 積分区間

考察 123.1 : 得られた値は何を意味するでしょうか?

EX123.2 :cos(x)*cos(x)の場合を計算してみよう。

考察 123.2

自己相関とはどのようなものかを考えてください。

Ex3演習テキスト 3.2.4(4)(5)式の 1/π の係数の意味を考えてください。

(7) ‘式の1/2πの係数の意味を考えてください。

1.2.3 自己相関2

3.2.4 実複素数/級係数のまとめから抜粋

	実数	複素数
級数式	$f(x) =$ $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)...(1)$	$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}((a_n - jb_n)e^{jnx}))$ $c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ として $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnx} ...(6)'$ (但し$c_{-n} = \bar{c} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$)
係数式	$a_0 = \boxed{\frac{1}{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ $a_k = \boxed{\frac{1}{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \ldots\ldots(4)$ $b_k = \boxed{\frac{1}{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \ldots\ldots(5)$	複素係数項 $c_k = \boxed{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jkx} f(x)dx.....(7)'$

1.3 繰り返す波 - 周期関数

1.3.1 繰り返す波(周期関数)の分解

一定の周期で同じ形を繰り返す波は、関数に置き換えると周期関数といえる。
このような波(関数)は、複数の“基本的”な波(関数)に分解することができる。
この”基本的”な関数に、cosNx, sinNx (Nは整数なので、xの整数倍角)を使う。
もとの関数を分解すると各cosNx, sinNx,の成分の比率が求まるが、
この比率が an, bn という係数になる。

ここでは、まず矩形波(周期関数)から、BPF(Band Pass Filter) を通して、
サイン波(基底波部分)を取り出す。続いて、矩形波をFFTアナライザにかけて、
周波数スペクトルを観測する。

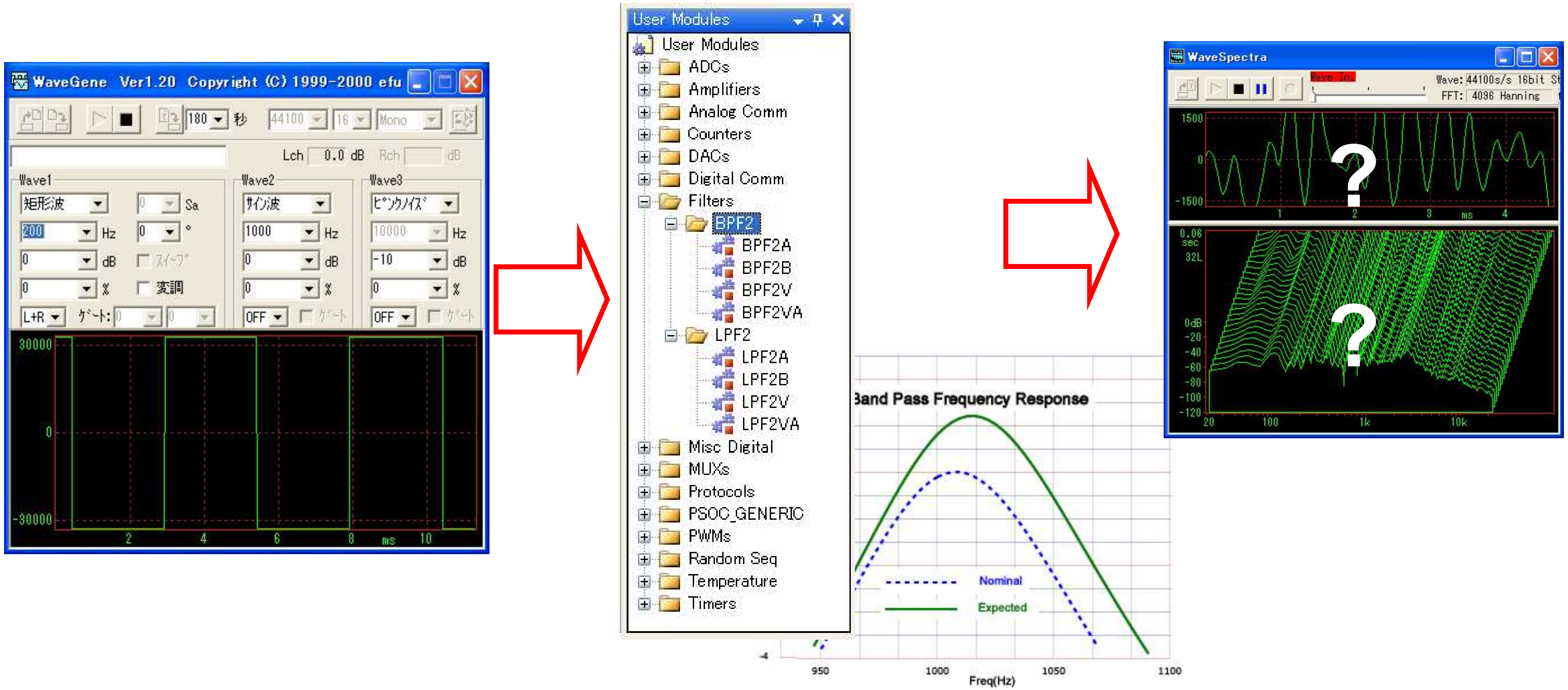
分解の逆の工程(演算)が合成となるが、分解で得られた成分をどんどん足しこんでいくと元の関数になる。Maxima を使って、どんどん係数付きサインN倍角波を足しこんでいく。この”合成”によって矩形波に近づけていく。

これが、周期関数のフーリエ級数展開である。

1.3.2 矩形波から正弦波をとりだす(B2PSoCBPF)

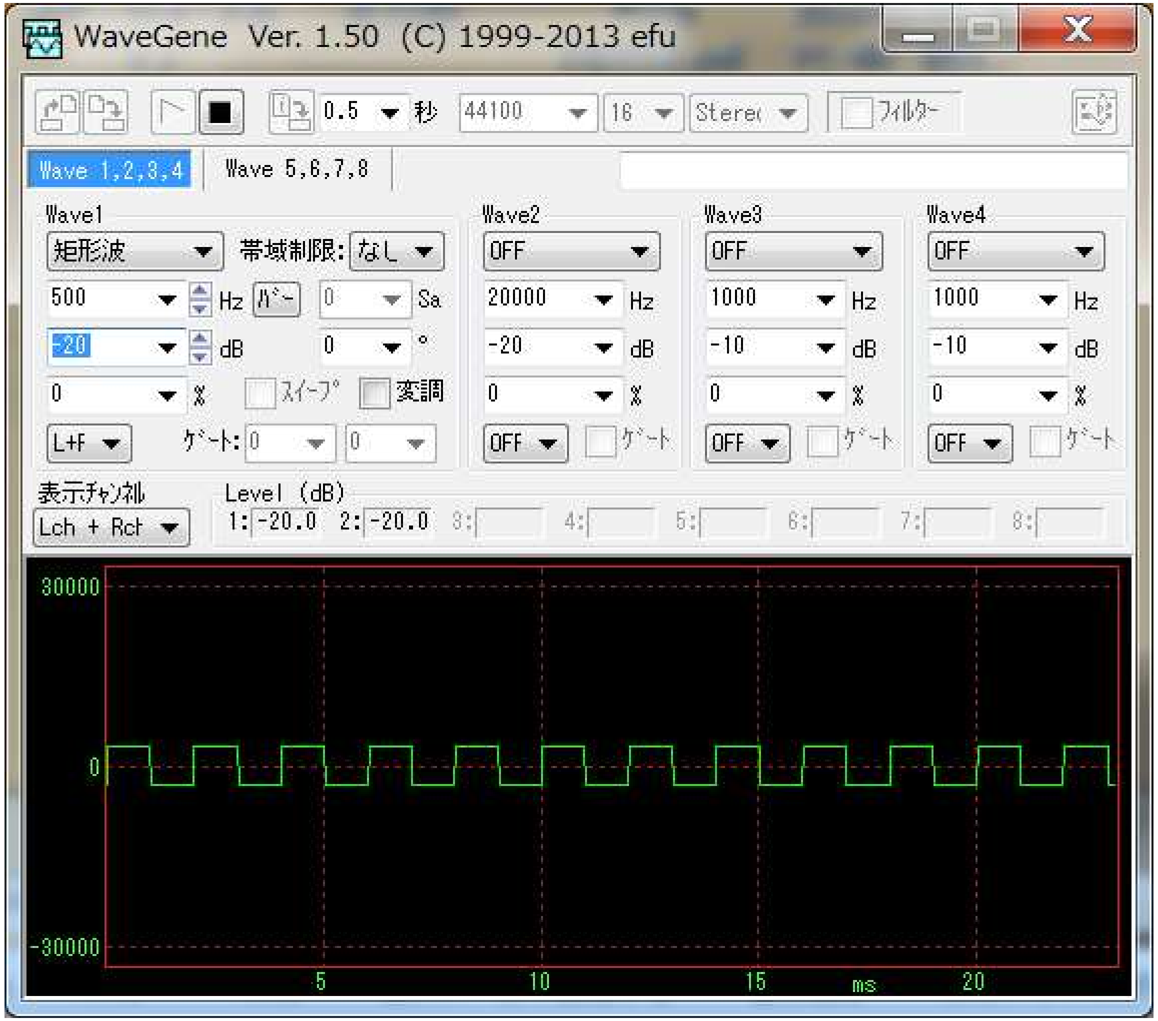
PWMで作った矩形波信号をPSoCのバンドパス・フィルターにかけると
特定スペクトルの周波数だけをパスさせることができる。

Review



1.3.3 WaveGen 矩形波を WaveSpectra で解析1

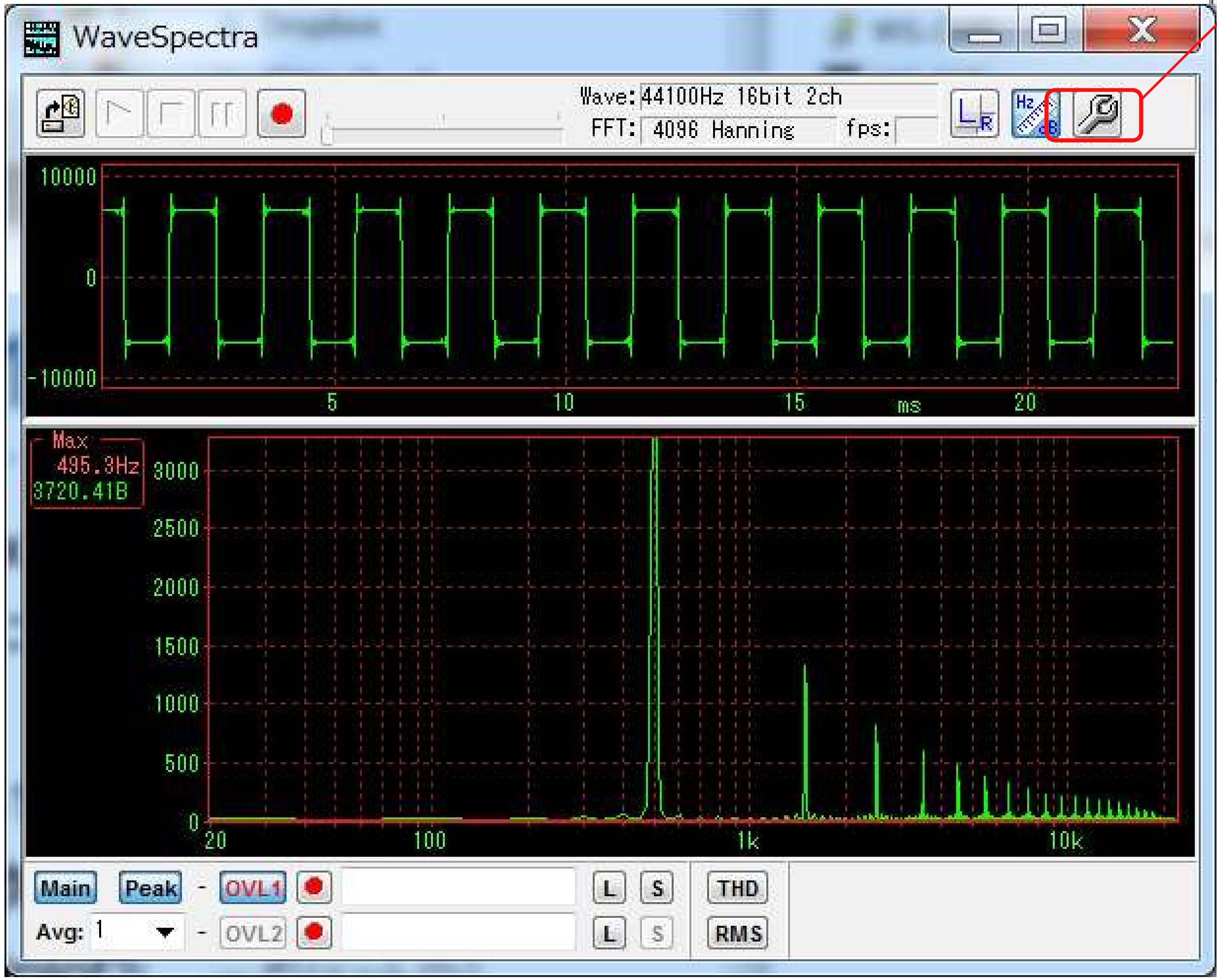
EX133 WaveGenで400Hz の矩形波を発生させ、Wave Spectra でFFT解析する。PCのヘッドホン出力信号をMic/Aux信号入力に入れる。(3ピンジャック使用)

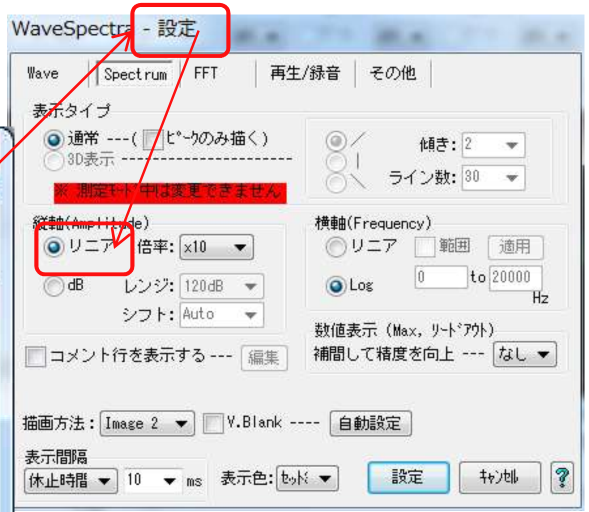


1.3.3 WaveGen 矩形波を WaveSpectra で解析2

EX132 Wave Spectra でFFT解析する。

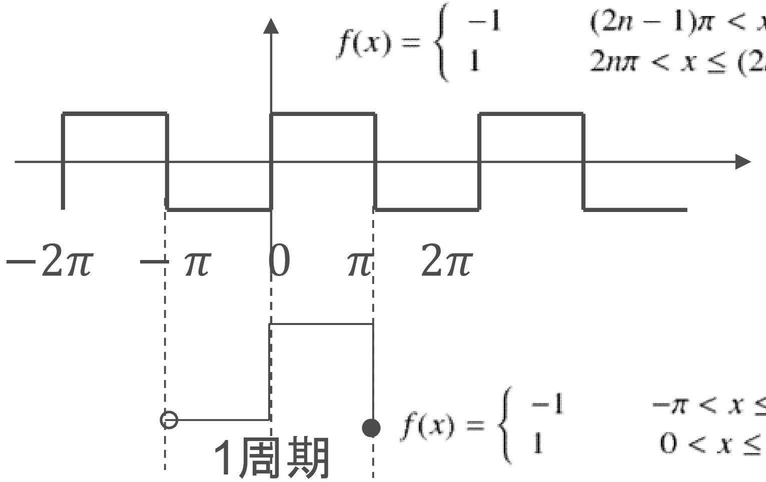
設定をリニアにすると見やすい





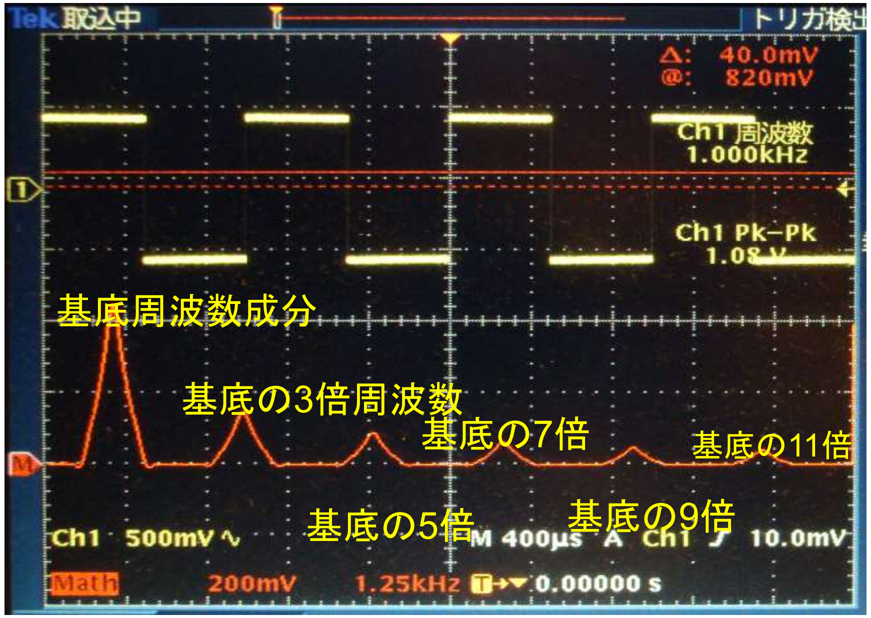
1.3.4 矩形波をオシロ/FFTアナライザで観測すると1

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (2n-1)\pi < x \le 2n\pi \\ 1 & 2n\pi < x \le (2n+1)\pi\end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi < x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le \pi\end{cases}$$

上は、矩形波の時間軸波形(横軸は時間)
下は、スペクトル（振幅はRMS）(横軸は周波数)



基底波を$1KHz$とすると
$1KHz, 3KHz, 5KHz, 7KHz$ ……

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x\ldots\right)$$

上の式が矩形波のフーリエ
級数展開になります。

なぜcosの項が現れないの
でしょうか？

1.3.4 矩形波をオシロ/FFTアナライザで観測すると2

波(関数)の合成と分解

矩形波は、サイン波から構成されていることがわかった。
FFTでは、矩形波を“分解”して、含まれるサイン波をとり出して表示させた。
整数倍の周波数のサイン波が、特定の割合で含まれている。
この“分解”の逆(=合成)を考えてみよう。

次の1.4.1では
Maximaを使って、右の式から波形を合成
してみよう。(簡単のために4/πは省略しよう)

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x \ldots.\right)$$

1.4 直交関数と関数の合成･分解

1.4.1 直交関数の加算による関数の合成

1.4.2 Maxima で計算(3次の場合)

1.4.3 合成とフーリエ級数展開

1.4.4 波の合成とフーリエ級数展開式

1.4.5 フーリエ級数式を読み解く

1.4.1 直交関数の加算による関数の合成

フーリエ変換は、もとの関数にcos(nx)とsin(nx)の直交関数列をかけて積分し、もとの関数と直交関数列との相関(成分比)を求めたものを新たな関数とするもので、このような変換を積分変換という。

このとき対象となるもとの関数は、周期関数で、積分区間は、1周期(基本周期)ぶんとって計算する。この計算を離散値(数列)で計算したものを離散フーリエ変換という。

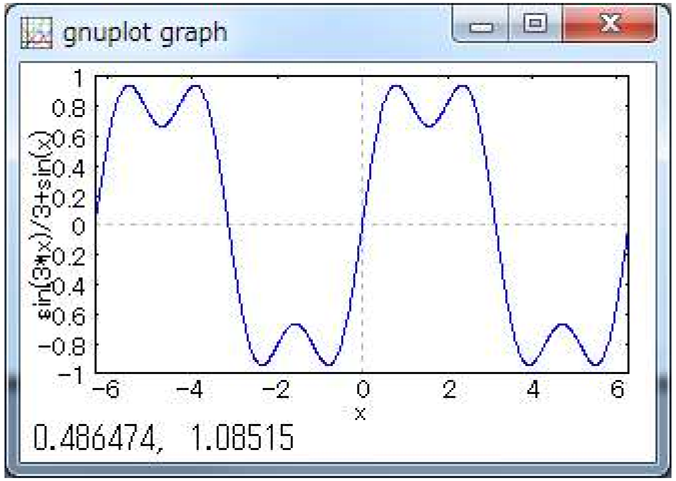
周期関数を対象にすることに注目しておくこと。詳細は、数学編テキストで解説
非周期関数を対象にする場合は、周期を-∞から∞と考えて、積分区間を-∞から∞までとしたものをフーリエ変換という

1.4.2 Maximaで計算(3次の場合)

EX142

(%i5) plot2d(sin(x)+(1/3)*sin(3*x),[x,-2*%pi,2*%pi]);

plot2d 2次元プロット表示してください　　解説



sin(x)　sin 関数 xはラジアン

[変数と値の区間]

[x, xの始め, xの終わり]

-2*%pi は -2π

2*%pi は 2π

1.4.3 合成とフーリエ級数展開

矩形波は、サイン波から構成されていることがわかった。
FFTでは、矩形波を“分解”して、含まれるサイン波をとり出して表示させた。
整数倍の周波数のサイン波が、特定の割合で含まれている。
この“分解”の逆(=合成)を考えてみよう。

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x \ldots\right)$$

Maximaを使って、右の式から波形を合成してみよう。(簡単のためにπ/4は省略しよう)

EX143 N次の場合を各自でプロットしてください。(Nは任意の正整数)

考察 143

Nが増えていくとグラフはどのようになっていくかを考察してください

1.4.4 波の合成とフーリエ級数展開式

$f(x) = a_0$
$+a_1 \cos x + b_1 \sin x$
$+a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$
$+a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x \ldots\ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$

xは、最も低い周波数で基底(基本)波といいます。
他の項には、すべて基底波の整数倍の波が現れ、
これらを高調波といいます。
a_0を$\frac{1}{2}a_0$と置き直してまとめ(1)式を得ます。

どうしてa_0の係数を1/2にするの？

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ldots\ldots(1)$$

$\frac{1}{2}a_0$は、定数項(直流成分)、$\frac{1}{2}$はノルムが倍のため、係数合わせ
$f(x)$は、級数のため非連続値です。

1.4.5 フーリエ級数式を読み解く

EX145 フーリエ級数式を読み解いてみてください。

この式は、何を意味しているのでしょうか？また疑問点を挙げてください。

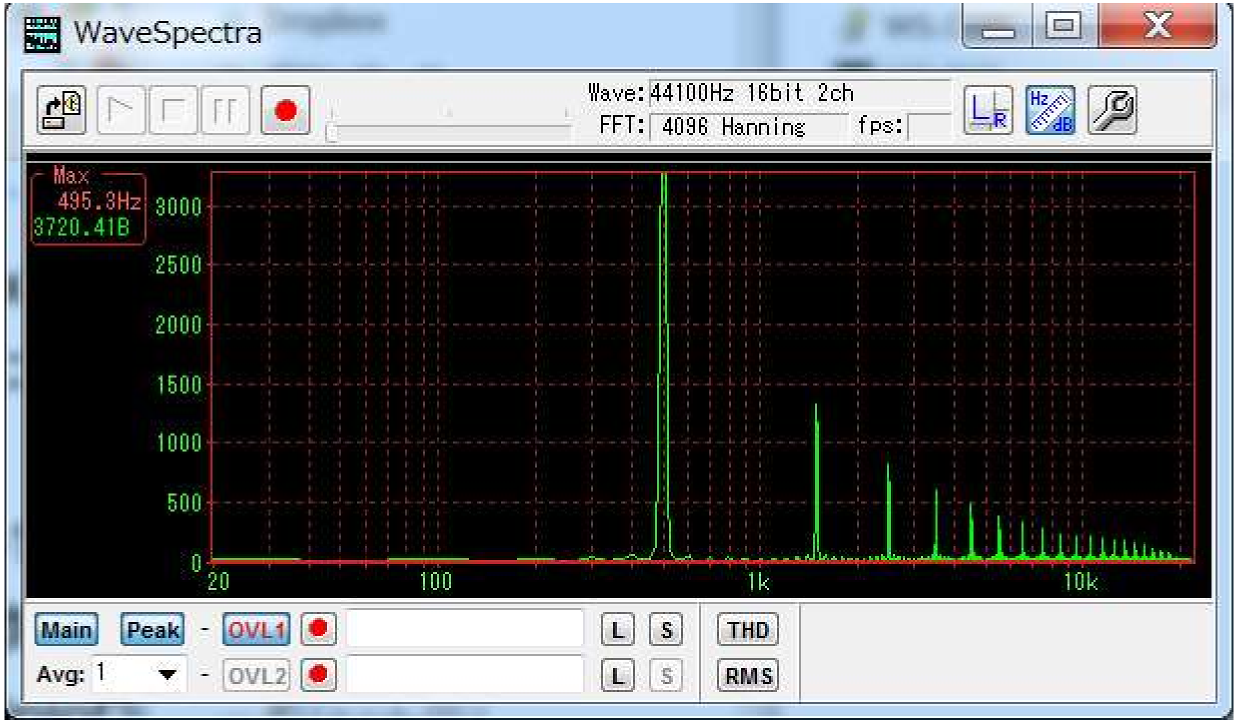
$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\text{.......}(1)$$

考察145

矩形波の分解では、 sinの倍角項だけが現れました。

何故cosの項が出てこないのか？

Cosの項を出す方法はないか？



EX1のポイント

1.対象とした波は、何度でも繰り返す波：これは周期関数

2. sin と cos の整数倍角を使用：これらは直交関数列

これがフーリエ
級数展開

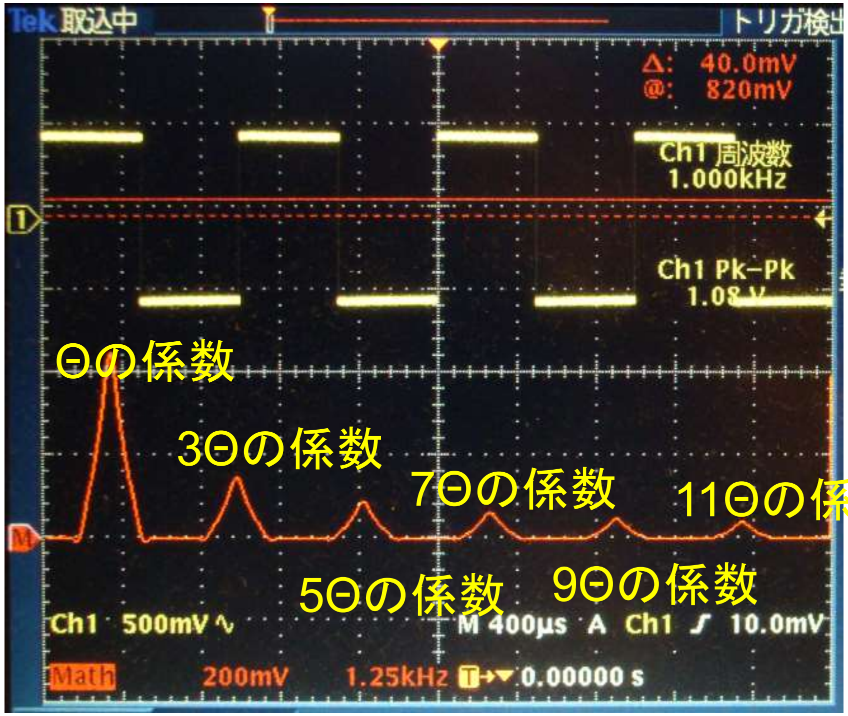
3.分解と合成は、逆の操作：逆変換が成り立つということ
そこで、波を周波数スペクトル分解するということは….
時間で変化する波(時間関数)を*スペクトル(周波数列)に変換*したということ
ここで周期を無限大にとると周波数列は、(隙間がつながって)周波数関数になる
つまり、波のスペクトル分解は、時間関数を周波数関数変換に対応する。
これがフーリエ変換と直観すればよい。逆の波への合成操作も成り立つので、
これが、逆フーリエ変換と直観しておこう。

T: 変換, t: 時間, ν: 周波数

$T\{f(t)\} => G(\nu)$ … 時間関数から周波数関数へ

$T\{g(\nu)\} => F(t)$ … 周波数関数から時間関数へ

参考：矩形波とスペクトル、級数式



オシロスコープ波形とスペクトル（振幅はRMS）

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-1\le x<0),\\ 1 & (0\le x<1)\end{cases}$$

級数式 $$f(x)\approx\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\ \pi}\sin n\pi x$$

EX2連携

波=信号=関数=ベクトル=行列

波は、周期的に変化する信号であると考えます。信号とは工学の用語で、
これを理学(数学)では、関数といいます。以降、信号=関数です。

離散フーリエ変換(DFT)や高速フーリエ変換(FFT)では行列を使います。
波を行列に持ち込んでコンピュータでアルゴリズム計算するために、
関数をベクトル化して行列計算にもちこみます。
波=信号=関数=ベクトル=行列　は、板書で解説します。
(詳しい解説は数学編テキストで解説、授業ビデオでの復習もできます。)

EX2連携

フーリエ変換は、もとの関数にcos(nx)とsin(nx)の直交関数列をかけて積分し、もとの関数と直交関数列との相関(成分比)を求めたものを新たな関数とするもので、このような変換を積分変換という。

このとき対象となるもとの関数は、周期関数で、積分区間は、1周期(基本周期)ぶんとって計算する。この計算を離散値(数列)で計算したものを離散フーリエ変換という。

周期関数を対象にすることに注目しておくこと。詳細は、数学編テキストで解説
非周期関数を対象にする場合は、周期を-∞から∞と考えて、積分区間を-∞から∞までとしたものをフーリエ変換という

注意して理解すめき点として、級数式と係数式を対比関係で理解することです。これは、合成と分解に関連します。

Memo

フォローアップURL (Revised)

http://mikami.a.la9.jp/meiji/MEIJI.htm

担当講師

三上廉司(みかみれんじ)
Renji_Mikami(at_mark)nifty.com
mikami(at_mark)meiji.ac.jp (Alternative)
http://mikami.a.la9.jp/_edu.htm